Logique — Exercices Physique 11e HarmoS

Exercice 1

Sur l'île des Véridiques (disant toujours la vérité) et des Menteurs (mentant toujours), vous rencontrez trois habitants **A**, **B** et **C** :

- **A :** « Exactement un seul d'entre nous trois est un Menteur. »
- **B :** « Exactement deux d'entre nous trois sont des Menteurs. »
- **C :** « Nous sommes tous les trois des Menteurs. »

Déterminer le statut de A, B et C en justifiant chaque étape.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Paradoxes logiques et autoréférence :

1. **Le paradoxe d'Épiménide / du menteur :** On considère la phrase P : *« Cette phrase est fausse. »* Expliquer pourquoi P ne peut être ni vraie, ni fausse.
2. **Le paradoxe du barbier (Bertrand Russell) :** Dans un village, un règlement stipule : *« Le barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et uniquement ceux-là. »* À la question *« Qui rase le barbier ? »*, montrer qu'une contradiction apparaît dans les deux cas, et quelle condition cachée du village rendait l'énoncé impossible.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Implication logique et contraposée : On considère la règle suivante dans un laboratoire : *« Si la lampe rouge est allumée (R), alors le capteur thermique est actif (C). »* ($R \implies C$).

1. Parmi les quatre observations ci-dessous, lesquelles **respectent** la règle et lesquelles la **violent** ?
   - (a) Lampe rouge allumée, capteur actif ;
   - (b) Lampe rouge allumée, capteur inactif ;
   - (c) Lampe rouge éteinte, capteur actif ;
   - (d) Lampe rouge éteinte, capteur inactif.
2. Écrire la **contraposée** et la **réciproque** de l'implication $R \implies C$. Laquelle des deux est toujours logiquement équivalente à la règle initiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Le test de sélection de Wason : Quatre fiches d'expérience sont posées sur une table. Chaque fiche porte d'un côté le nom d'un métal ou plastique (**Cuivre**, **Plastique**) et de l'autre côté une mention (**Conducteur**, **Isolant**). Les faces visibles sont :

Cuivre	Plastique	Conducteur	Isolant

On veut vérifier la règle : *« Si une fiche porte **Cuivre** d'un côté, alors elle porte **Conducteur** de l'autre côté. »*

Quelles fiches (et **uniquement** celles-là) devez-vous impérativement retourner pour tester cette règle avec certitude ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Dans une volée de 120 **élèves** de 11e HarmoS :

- 72 élèves suivent l'option **Physique** (P) ;
- 60 élèves suivent l'option **Informatique** (I) ;
- 24 élèves ne suivent aucune de ces deux options.

1. À l'aide d'un diagramme de Venn, déterminer le nombre d'élèves qui suivent :
   - les **deux** options à la fois ($P \cap I$) ;
   - **uniquement** la Physique ;
   - **uniquement** l'Informatique ;
   - **exactement une** des deux options (ou exclusif).
2. Quelle fraction des élèves de Physique suit également l'Informatique ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Lors d'un congrès du CERN à Genève réunissant 100 **chercheurs**, chaque chercheur parle au moins l'une des trois langues suivantes : **Français** (F), **Allemand** (A) ou **Anglais** (E).

On dispose des statistiques suivantes :

- 50 parlent Français, 43 parlent Allemand et 57 parlent Anglais ;
- 18 parlent à la fois Français et Allemand ;
- 22 parlent à la fois Français et Anglais ;
- 20 parlent à la fois Allemand et Anglais.

1. En utilisant la formule d'inclusion–exclusion pour 3 ensembles, calculer le nombre x de chercheurs qui maîtrisent les **trois langues** à la fois.
2. Compléter les 7 zones du diagramme de Venn et en déduire combien de chercheurs ne parlent **qu'une seule** de ces trois langues.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Trois coffres **A**, **B** et **C** contiennent l'un un **diamant**, un autre de l'**or**, et le troisième est **vide**. Chaque coffre porte une inscription :

- **Coffre A :** « Le diamant est dans le coffre B. »
- **Coffre B :** « Ce coffre-ci n'est pas vide. »
- **Coffre C :** « L'or est dans le coffre A. »

On sait que **l'inscription du coffre contenant le diamant est vraie**, tandis que **les inscriptions des deux autres coffres sont fausses**.

Déterminer le contenu exact de chacun des trois coffres.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Le paradoxe de Monty Hall (raisonnement conditionnel) : Dans un jeu télévisé, un cadeau est caché derrière l'une de **trois portes fermées** (1, 2 ou 3), et les deux autres cachent une chèvre.

1. Vous choisissez la **porte 1**. Quelle est la probabilité que le cadeau soit derrière votre porte ? et derrière l'ensemble des deux autres portes (2 ou 3) ?
2. Le présentateur (qui **sait** où est le cadeau) ouvre alors l'une des deux autres portes contenant une chèvre — par exemple la **porte 3** — et vous propose de **changer votre choix** pour prendre la porte 2.

3. En listant les 3 **emplacements équiprobables** possibles du cadeau, montrer pourquoi vous avez intérêt à **changer de porte**, et quelles sont vos chances de gagner si vous gardez la porte 1 contre si vous changez pour la porte 2.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Cinq échantillons de métaux alcalins (**Lithium**, **Sodium**, **Potassium**, **Rubidium**, **Césium**) sont rangés dans cinq tiroirs numérotés de 1 à 5 (de gauche à droite), un par tiroir :

1. Le **Potassium** se trouve dans un tiroir de numéro impair, mais à aucune des deux extrémités (1 ou 5).
2. Le **Lithium** est placé immédiatement à gauche du **Césium**.
3. Le **Césium** ne se trouve pas dans le tiroir 2.
4. Le **Sodium** porte un numéro de tiroir strictement supérieur à celui du **Rubidium**.

Retrouver le contenu exact des tiroirs 1 à 5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Lois de De Morgan et logique des circuits : Soient A et B deux propositions logiques (pouvant valoir Vrai $= 1$ ou Faux $= 0$). On note $\overline{A}$ la négation de A.

1. À l'aide d'une **table de vérité** à 4 lignes, démontrer la première loi de De Morgan :

$$\overline{A \text{ ET } B} \equiv \overline{A} \text{ OU } \overline{B}$$

2. En déduire la négation logique correcte de chacune des deux phrases suivantes :
   - « L'interrupteur A est fermé **et** la lampe B est allumée. »
   - « Le nombre x vérifie $x \geq 2$ **et** $x < 5$. » (Écrire la négation sous forme de réunion d'intervalles avec « ou ».)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Parmi les entiers de 1 à 30, combien sont divisibles par 2 ou par 3, mais pas par les deux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Nora affirme que les 5 lampes fonctionnent. Donne la négation logique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quatre cartes montrent 10, 11, A et B, chacune avec un entier d'un côté et une lettre de l'autre. Pour vérifier « si A, alors nombre pair », quelles cartes retourner ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un programme refuse toute mesure inférieure à 5. Une mesure a été acceptée. Quelle borne déduis-tu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un panier contient 5 valeurs positives et deux valeurs nulles. Réfute « toutes les valeurs sont strictement positives ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Quatre décisions sont binaires. Combien de configurations rendent vraie la proposition « exactement trois décisions sont positives » ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Si P alors Q. Peut-on avoir simultanément P vrai et Q faux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Justifie l'équivalence entre « ni P ni Q » et « P est faux et Q est faux ».

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Explique le sens du carré pair vers le nombre pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trois boutons activent un voyant lorsque le nombre de boutons fermés est impair. Combien y a-t-il de configurations d'allumage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

L'implication « $A \Rightarrow B$ » (« si A, alors B ») n'est fausse que lorsque A est vraie et B fausse.

1. Dresser sa table de vérité.
2. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   - « Si $2+2=4$, alors Berne est en Suisse. »
   - « Si $2+2=4$, alors $3>5$. »
   - « Si $2+2=5$, alors la Lune est en fromage. »

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Démontrer l'équivalence : « un entier n est pair **si et seulement si** n^2 est pair ».

1. Démontrer le sens direct : si n est pair, alors n^2 est pair.
2. Démontrer la réciproque en utilisant la contraposée : si n est impair, alors n^2 est impair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Pour chaque phrase, dire si elle est vraie ou fausse, puis écrire sa négation :

1. « Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$. »
2. « Il existe un nombre réel x tel que $x^2 < 0$. »
3. « Pour tout nombre réel x, $x^2 > x$. »

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Démontrer **par l'absurde** qu'il n'existe pas de plus grand nombre pair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Deux gardiens surveillent deux portes : l'une mène à la liberté, l'autre en prison. L'un des gardiens dit toujours la vérité, l'autre ment toujours, mais on ne sait pas lequel. On ne peut poser **qu'une seule question** à **un seul** gardien.

Quelle question poser pour trouver la bonne porte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Trois maisons alignées (positions 1, 2, 3 de gauche à droite) sont rouge, verte et bleue, et habitées par un Suisse, une Italienne et un Français.

- L'Italienne habite la maison rouge.
- La maison verte est immédiatement à droite de la maison rouge.
- Le Suisse habite la maison 1.
- Le Français n'habite pas la maison bleue.

Qui habite où, et de quelle couleur est chaque maison ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On affirme : « pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 - n + 11$ est premier ».

1. Tester $n = 0$, 1, 2, 3, 4.
2. Trouver un contre-exemple sans calcul (penser à $n = 11$).
3. Que retenir sur la démonstration d'une propriété générale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. Démontrer que la somme de deux nombres impairs est paire.
2. Démontrer que le produit de deux nombres impairs est impair.
3. La somme de trois nombres impairs est-elle paire ou impaire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On place 5 points à l'intérieur d'un carré de côté 2 cm.

1. En partageant le carré en 4 petits carrés de côté 1 cm, montrer que deux des points sont dans le même petit carré.

2. En déduire que deux des points sont distants d'au plus $\sqrt{2}$ cm $\approx 1{,}41$ cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Démontrer par **contraposée** : « si n^2 est impair, alors n est impair ».

1. Énoncer la contraposée.
2. La démontrer.
3. Pourquoi cela démontre-t-il la propriété initiale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site