Étude de lieux — Exercices Physique 11e HarmoS

Exercice 1

Méthode formelle en 3 étapes — Lieu du sommet d'un triangle d'aire constante : On donne un segment fixe $[AB]$ de longueur 6 cm. On considère tous les points M du plan tels que le triangle ABM ait une **aire constante égale à** 12 **cm**^{2}.

Mener l'étude complète du lieu géométrique de M selon la démarche en trois étapes :

1. **Expérimentation et conjecture :** Calculer la hauteur h du triangle issue de M, placer plusieurs points particuliers et formuler une conjecture sur le lieu.
2. **Limites et cas exclus :** Vérifier s'il existe des points interdits ou des frontières.
3. **Démonstration en deux temps (nécessité et suffisance) :** Prouver la double inclusion.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Lieu des milieux des cordes passant par un point fixe : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 5$ cm, ainsi qu'un point intérieur fixe A tel que $OA = 3$ cm.

Une droite variable d pivote autour de A et coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points P et Q. On étudie le **lieu géométrique du milieu** M **de la corde** $[PQ]$.

1. **Expérimentation :** Placer M pour la corde portée par (OA), pour la corde perpendiculaire à (OA) en A, et pour une corde oblique.
2. **Conjecture et cas limites :** Quel lieu géométrique décrit le point M ? Y a-t-il des points à exclure ?
3. **Démonstration (nécessité et suffisance) :** Démontrer rigoureusement le lieu trouvé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Lieu des milieux des segments issus d'un point vers un cercle (homothétie) : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 6$ cm, ainsi qu'un point fixe A extérieur au cercle tel que $OA = 10$ cm.

Un point P parcourt tout le cercle $\mathcal{C}$, et l'on note M **le milieu du segment** $[AP]$.

1. **Expérimentation :** Placer M lorsque P est aux deux intersections de $\mathcal{C}$ avec la droite (OA), et lorsque $(OP) \perp (OA)$.
2. **Conjecture et démonstration :** Quelle transformation géométrique transforme P en M ? En déduire le lieu exact de M (centre et rayon) et rédiger la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Étude de lieu avec cas exclus et restriction : On donne un segment fixe $[AB]$ de longueur 10 cm. On cherche le lieu des points M du plan tels que le triangle ABM soit **rectangle en** M et que la hauteur issue de M soit **strictement supérieure à** 2,5 **cm**.

1. Dans un premier temps sans la condition sur la hauteur, quel est le lieu des points M tels que ABM soit rectangle en M ? Quels **points limites** doivent être exclus ?
2. En ajoutant la condition $h > 2{,}5$ cm (distance de M à (AB) strictement supérieure à 2,5 cm), décrire exactement le lieu final (rayons, arcs ouverts, angles au centre exacts), puis rédiger la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Lieu des points équidistants d'un point et d'une droite / ou de deux droites sécantes (bissectrices) : On donne deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point O et formant un angle de 60°.

On cherche le lieu géométrique des centres M des cercles qui sont **simultanément tangents aux deux droites d_1 et d_2**.

1. **Expérimentation et cas exclu :** Pour qu'un cercle de centre M soit tangent à d_1 et à d_2, quelle relation doivent vérifier les distances de M à d_1 et à d_2 ? Le point d'intersection O appartient-il au lieu ?
2. **Conjecture et démonstration (nécessité et suffisance) :** Décrire précisément le lieu cherché.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Lieu du centre de gravité G d'un triangle dont un sommet parcourt un cercle : Soit un segment fixe $[AB]$ de longueur 6 cm, et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 6$ cm (ne passant pas par A ni B? Choisissons des coordonnées simples : $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $O(0;6)$, $R = 3$ cm).

Un point M parcourt tout le cercle $\mathcal{C}(O; 3\text{ cm})$. On note G **le centre de gravité** du triangle ABM.

1. **Expérimentation et limites :** Que se passe-t-il si M est aligné avec A et B ? Ici, le cercle $\mathcal{C}$ coupe-t-il la droite (AB) ?
2. **Conjecture et démonstration :** En utilisant la propriété du centre de gravité $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IM}$ (où I est le milieu fixe de $[AB]$), déterminer exactement le lieu géométrique de G (centre et rayon) et prouver la nécessité et la suffisance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Lieu des centres des cercles passant par un point fixe et tangents à une droite : Soient une droite horizontale fixe d $(y = 0)$ et un point fixe $F(0;4)$ situé à 4 cm au-dessus de d.

On cherche le lieu géométrique des centres $M(x;y)$ des cercles qui **passent par** F et qui sont **tangents à la droite** d.

1. Traduire ces deux conditions en une égalité de distances concernant M. Peut-on avoir $y \leq 0$?
2. En exprimant $MF^2 = d(M;d)^2$ dans le repère orthonormé, démontrer que l'équation du lieu est $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$ (**parabole**), puis justifier la suffisance (réciproque).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Lieu d'un point dans un rectangle (somme des carrés des distances) : Soit $ABCD$ un rectangle de dimensions $AB = 8$ cm et $BC = 6$ cm, de centre O (intersection des diagonales).

On cherche le lieu des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 164\text{ cm}^2$$

1. Placer le repère orthonormé centré en $O(0;0)$: quelles sont les coordonnées des 4 sommets A, B, C, D ?
2. Calculer $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ en fonction de x et y pour un point $M(x;y)$, et montrer que l'expression se réduit à $4(x^2 + y^2) + 100$.
3. En déduire le lieu exact de M (centre et rayon), et vérifier si les sommets A, B, C, D appartiennent à ce lieu (pour quelle constante k à la place de 164 passeraient-ils par le cercle ?).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Lieu d'intersection de deux droites mobiles (lieu de l'orthocentre) : Dans un repère orthonormé, on donne deux points fixes $A(-4;0)$ et $B(4;0)$ sur l'axe horizontal. Un point mobile $M(0;t)$ (avec $t \in \mathbb{R}^*$) parcourt l'axe vertical (privé de l'origine O).

On étudie le lieu de l'**orthocentre** H du triangle ABM lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$.

1. Quelle est l'équation de la hauteur issue de M (perpendiculaire à (AB)) ? En déduire l'abscisse x_H de H.
2. Exprimer la pente de (BM) en fonction de t, puis l'équation de la hauteur issue de A (perpendiculaire à (BM)).
3. En déduire l'ordonnée y_H en fonction de t, puis conclure quel est le **lieu géométrique exact** décrit par H (sans oublier les cas exclus !).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Étude de lieu par géométrie pure — Lieu d'un point divisant une corde variable (arc capable) : Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 4$ cm, et un point fixe A sur ce cercle. Une corde $[AP]$ varie lorsque P parcourt $\mathcal{C} \setminus \{A\}$. Sur le segment $[AP]$, on place le point M tel que $AM = \frac{1}{3}AP$.

1. **Expérimentation :** Où se trouve M quand P est diamétralement opposé à A (point B) ? Que vaut l'angle $\widehat{AMB}$ pour un point P quelconque ?
2. **Conjecture et cas limite :** Identifier le lieu probable de M (centre, rayon, point exclu).
3. **Démonstration (nécessité et suffisance) :** Prouver rigoureusement que le lieu est exactement le cercle trouvé privé de A.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Quel est le lieu des points à distance au plus 5 cm de O ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Quel est le lieu des points plus proches de A que de B, pour des points distincts A et B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Sur x = 0, combien de points sont à 5 unités de (3, 0) dans un repère orthonormé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Décris le lieu des points P tels que PA + PB = AB.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Décris le lieu des milieux de segments joignant un point fixe O aux points P d'un cercle centré en O, de rayon 8 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Quel lieu vérifie $x^2 + y^2 = 9$ dans un repère orthonormé ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quels points sont à la fois à 2 cm d'une droite et à 2 cm d'un point O situé sur cette droite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Étudie le lieu des points P milieu de AQ lorsque Q parcourt une droite d et A est fixe, hors de d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux droites se coupent. Quel lieu décrit tous les points à égale distance des deux droites ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Dans un repère orthonormé, quel lieu vérifie $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Déterminer par le calcul le lieu des points $M(x; y)$ équidistants de $A(1; 2)$ et $B(5; 6)$. Interpréter.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On donne $A(-3; 0)$ et $B(3; 0)$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 50$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un point M parcourt le cercle de centre $C(6; 0)$ et de rayon 4. On note I le milieu de $[OM]$, où O est l'origine.

1. Calculer la position de I quand $M = (10; 0)$, $M = (2; 0)$, $M = (6; 4)$.
2. Démontrer que I décrit un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

On donne $A(0; 0)$ et $B(3; 0)$. Déterminer le lieu des points M tels que $MA = 2MB$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Déterminer le lieu des centres des cercles qui passent par le point $F(0; 2)$ et sont tangents à l'axe des abscisses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On donne $A(-5; 0)$ et $B(5; 0)$. Déterminer le lieu des points P tels que le triangle APB soit rectangle en P, en utilisant la condition « pentes perpendiculaires » ou Pythagore.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une échelle $[AB]$ de 4 m glisse : A reste sur le sol (axe des x, $x \geq 0$) et B contre le mur (axe des y, $y \geq 0$).

1. Quelle est la position du milieu I de l'échelle lorsque l'échelle est verticale ? horizontale ? lorsque $A(2;0)$?
2. Démontrer que I reste à une distance constante de l'origine. Quel est le lieu de I ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On donne $A(0;0)$ et $B(6;0)$. Déterminer le lieu des points C tels que le triangle ABC ait une aire de 12.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Déterminer le lieu des points $M(x;y)$ dont la somme des distances aux deux axes vaut 4, c'est-à-dire $|x| + |y| = 4$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Déterminer le lieu des points situés à la distance 3 de la droite $d : y = 2x$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site