Dénombrement — Exercices Physique 11e HarmoS

Exercice 1

Principe multiplicatif et arbres de choix : Un restaurant scientifique propose une formule composée d'une entrée (au choix parmi 3), d'un plat (au choix parmi 4) et d'un dessert (au choix parmi 2).

1. Combien de menus complets différents peut-on composer ?
2. Un cadenas à 4 molettes utilise les chiffres de 0 à 9 (avec répétitions possibles). Combien de codes différents existe-t-il ?
3. Combien de ces codes à 4 chiffres ne contiennent **aucun chiffre pair** $(0, 2, 4, 6, 8)$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Permutations sans répétition et avec contrainte : Cinq coureurs (**Alice**, **Bastien**, **Chloé**, **David**, **Éva**) participent à une finale de 100 m (sans ex æquo).

1. Combien de classements complets différents (de la 1re à la 5e place) sont possibles ?
2. Combien de classements existent si **Alice et Bastien** doivent impérativement être **côte à côte** dans le classement (l'un juste devant l'autre) ?
3. Combien de classements existent si **Alice** arrive quelque part **devant Bastien** (pas nécessairement juste devant) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Permutations avec répétition (anagrammes) :

1. Combien d'anagrammes (avec ou sans sens) peut-on former avec toutes les lettres du mot `PRISME` (6 lettres toutes distinctes) ?
2. Combien d'anagrammes distincts peut-on former avec toutes les lettres du mot `OPTIQUE` (7 lettres distinctes) ? et du mot `ATOME` (5 lettres distinctes) ?
3. Combien d'anagrammes distincts peut-on former avec toutes les lettres du mot `MASSE` (5 lettres, dont deux `S`), puis du mot `ENERGIE` (7 lettres, dont trois `E`) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Arrangements sans répétition ($A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$) : Une classe de 12 élèves doit élire un **comité** de 3 personnes occupant des fonctions différentes : **un(e) président(e)**, **un(e) secrétaire** et **un(e) trésorier(ère)** (sans cumul possible).

1. Combien de comités différents peut-on former ?
2. Combien de comités peut-on former si **Léa** doit obligatoirement faire partie du comité (à l'un des 3 postes) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Combinaisons sans répétition ($\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$) : Dans la même classe de 12 élèves, on souhaite cette fois choisir une **délégation de 3 élèves** sans hiérarchie ni rôles distincts (l'ordre ne compte pas).

1. En expliquant le lien avec l'exercice précédent (1 320 comités ordonnés), calculer le nombre de délégations de 3 élèves.
2. La classe compte 7 **filles** et 5 **garçons**. Combien de délégations de 3 élèves comportent **exactement** 2 **filles et** 1 **garçon** ?
3. Combien de délégations comportent **au moins** 1 **fille** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Plaques d'immatriculation et mots de passe (dénombrement mixte) : Dans un canton fictif, une plaque d'immatriculation est formée de 2 **lettres distinctes** choisies parmi les 26 lettres majuscules `A-Z`, suivies de 4 **chiffres** (`0-9`, les répétitions étant autorisées, y compris `0000`).

1. Combien de plaques différentes peuvent être émises au total ?
2. Combien de plaques possèdent des chiffres **tous différents** (les 2 lettres distinctes et les 4 chiffres distincts) ?
3. Combien de plaques contiennent **au moins deux chiffres identiques** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Tirage dans une jeu de 36 **cartes (jass suisse) :** Un jeu de jass suisse comporte 36 **cartes** (4 couleurs : Cœur, Carreau, Pique, Trèfle — ou Rose, Grelot, Gland, Bouclier — avec 9 hauteurs chacune : $6, 7, 8, 9, 10$, Valet, Dame, Roi, As).

On distribue une main de 4 **cartes** simultanément (l'ordre n'a pas d'importance).

1. Combien de mains de 4 cartes différentes existe-t-il au total ?
2. Combien de mains contiennent **les** 4 **As** ? **exactement** 3 **As** ?
3. Combien de mains sont composées uniquement de 4 **cartes de la même couleur** (par exemple 4 Cœurs ou 4 Piques, etc.) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Combinaisons avec répétition (méthode des étoiles et des barres) : Un laboratoire achète 8 **flacons** identiques (indiscernables) répartis en 3 **types** d'acides possibles : acide chlorhydrique (H), acide sulfurique (S) ou acide nitrique (N). On peut prendre 0 à 8 flacons de chaque type.

1. En modélisant chaque commande par 8 étoiles (`*`) et 2 séparateurs (`|`) (par exemple `***|**|***` signifie $3\,H + 2\,S + 3\,N$), expliquer pourquoi le nombre de commandes possibles vaut $\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}$. Calculer ce nombre.
2. Combien de commandes différentes existe-t-il si l'on impose d'acheter **au moins** 1 **flacon de chaque** des 3 acides ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Dénombrement en géométrie (polygones et triangles sur un cercle) : On place 10 **points distincts** sur un cercle (aucun triplet de cordes n'est concourant à l'intérieur du cercle).

1. Combien de **cordes** (segments reliant 2 points) peut-on tracer au total ?
2. Combien de **triangles** différents dont les 3 sommets sont choisis parmi ces 10 points peut-on former ?
3. Combien de **points d'intersection** à l'intérieur du disque ces cordes forment-elles entre elles ? *(Indice : chaque point d'intersection intérieur correspond de manière unique à 4 points sur le cercle formant un quadrilatère convexe dont il est l'intersection des deux diagonales !)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Chemins sur grille avec point de passage interdit ou imposé : Sur une grille rectangulaire, un robot part de $A(0;0)$ pour rejoindre $B(6;4)$ en ne faisant que des pas vers l'Est ($+1$ en x) ou vers le Nord ($+1$ en y), soit 10 pas au total.

1. Expliquer pourquoi le nombre total de chemins de A à B vaut $\binom{10}{4}$ (ou $\binom{10}{6}$) et calculer ce nombre.
2. Combien de ces chemins passent obligatoirement par le point relais $R(3;2)$?
3. En déduire le nombre de chemins qui **évitent** le point $R(3;2)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Cinq ateliers en parallèle proposent respectivement un, deux, trois, quatre et cinq créneaux. On choisit un atelier puis l'un de ses créneaux. Combien de choix ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Combien de suites de trois lettres différentes peut-on former avec A, B, C et D ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Parmi neuf personnes, on forme un duo sans rôles. Combien de duos ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On distribue trois médailles distinctes à trois personnes parmi sept. Combien de distributions ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Combien de codes de quatre bits ont exactement deux 1 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Combien de chemins minimaux sur une grille demandent deux pas vers l'est et trois vers le nord ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres de MAMAN ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un menu offre quatre entrées et cinq plats. Deux associations précises sont indisponibles. Combien de menus restent possibles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

De combien de manières placer quatre livres différents sur une étagère si deux livres précis doivent rester côte à côte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Parmi les entiers de 1 à 60, combien sont divisibles par 4 ou 6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un code PIN de carte bancaire comporte 4 chiffres (de 0 à 9).

1. Combien de codes différents existe-t-il ?
2. Combien de codes ont leurs 4 chiffres tous différents ?
3. En déduire le nombre de codes comportant au moins un chiffre répété.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Huit athlètes disputent la finale d'un 100 m.

1. De combien de façons le podium (or, argent, bronze) peut-il être composé ?
2. Combien de groupes de 3 athlètes qualifiés pour la suite (sans ordre) peut-on former ?
3. Expliquer le lien entre les deux résultats.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Dans une classe de 12 élèves, on forme un comité de 5 élèves.

1. Combien de comités différents peut-on former ?
2. Combien de comités comprenant un président désigné (parmi les 5) peut-on former ?
3. Combien de comités contiennent Léa ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

1. Combien d'anagrammes (avec ou sans signification) peut-on former avec les lettres du mot **PHYSIQUE** ?
2. Et avec les lettres du mot **BALLON** ?
3. Et avec **ANANAS** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On place 10 points sur un cercle.

1. Combien de segments peut-on tracer entre ces points ?
2. Combien de triangles ont leurs sommets parmi ces points ?
3. Combien de quadrilatères ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Au Swiss Lotto, on coche 6 numéros parmi 42 (on ne tient pas compte du numéro chance).

1. Combien de grilles différentes existe-t-il ?
2. Quelle est la probabilité de gagner le gros lot avec une grille ?
3. Combien de grilles ont exactement 5 bons numéros ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Sur une grille, un robot part de $(0;0)$ et va en $(4;3)$ en faisant uniquement des pas d'une unité vers l'Est (E) ou vers le Nord (N).

1. Combien de pas fait-il ? Combien de chemins différents existe-t-il ?
2. Combien de chemins passent par le point $(2;1)$?
3. Combien de chemins évitent ce point ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. De combien de façons 6 personnes peuvent-elles s'asseoir sur un banc de 6 places ?
2. Et autour d'une table ronde (deux dispositions qui se déduisent par rotation sont considérées comme identiques) ?
3. Autour de la table ronde, combien de dispositions placent Ana et Ben côte à côte ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Une pizzeria propose 8 ingrédients. Une pizza peut contenir n'importe quelle sélection d'ingrédients (y compris aucun).

1. Combien de pizzas différentes peut-on composer ?
2. Combien comportent exactement 3 ingrédients ?
3. Vérifier que $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{8} = 2^8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Triangle de Pascal : on a la relation $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

1. Écrire les lignes $n = 0$ à $n = 6$ du triangle de Pascal.
2. Vérifier la relation pour $\binom{6}{3}$.
3. Justifier la relation par un raisonnement : on choisit k élèves parmi n, dont Zoé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site