Constructions de lieux — Exercices Physique 11e HarmoS

Exercice 1

Lieux géométriques élémentaires (droites et cercles) : Sur une carte à l'échelle (1 cm = 1 km), un trésor T doit satisfaire simultanément deux contraintes :

- il est **équidistant** de deux arbres A et B distants de 8 cm ;
- il se trouve exactement à 5 **cm** d'un puits P (où P est situé à 3 cm de la médiatrice de $[AB]$).

1. Quel est le lieu géométrique des points vérifiant la première contrainte ? La deuxième contrainte ?
2. Décrire la construction à la règle et au compas permettant de trouver tous les emplacements possibles du trésor T, et calculer la distance séparant ces emplacements.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Cercle de Thalès et tangentes à un cercle depuis un point extérieur : On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $R = 3$ cm, et un point extérieur P situé à la distance $OP = 6$ cm.

1. Une tangente à $\mathcal{C}$ passant par P touche le cercle en un point T tel que $(OT) \perp (PT)$ (angle droit $\widehat{OTP} = 90°$). Quel est donc le **lieu géométrique** des points T voyant le segment $[OP]$ sous un angle droit ?
2. Décrire le protocole précis à la règle et au compas pour construire les 2 **tangentes** à $\mathcal{C}$ issues de P.
3. Calculer la longueur exacte des segments tangents PT_1 et PT_2, ainsi que la mesure de l'angle $\widehat{T_1PT_2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Construction d'un arc capable ($\alpha = 60°$) : Sur une carte maritime, deux phares A et B sont séparés de $AB = 6$ cm. Un navire M relève au sextant l'angle $\widehat{AMB} = 60°$ (du même côté de la droite (AB)).

1. Quel est le **lieu géométrique** des positions M situées dans un demi-plan fixé d'où l'on voit $[AB]$ sous un angle constant $\alpha = 60°$?
2. Pour construire le centre O de cet **arc capable** à la règle et au compas (méthode de la tangente) :
   - Tracer en A la demi-droite $[AT)$ faisant un angle de $60°$ avec $[AB]$ (dans le demi-plan *opposé* à l'arc).
   - Tracer en A la perpendiculaire à (AT).
   - Expliquer pourquoi son intersection O avec la médiatrice de $[AB]$ est le centre du cercle, et quel est l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
3. Calculer le rayon $R = OA$ de cet arc capable.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Construction d'un arc capable obtus ($\alpha = 135°$) : On donne un segment $[AB]$ de longueur 8 cm.

1. Où se situe le centre O de l'arc capable de $135°$ par rapport à la droite (AB) (du même côté que les points M, ou du côté opposé) ? *(Indice : comparer le petit arc et le grand arc.)*
2. Calculer l'angle $\widehat{OAB}$ et la distance du centre O au milieu H de $[AB]$, puis le rayon $R = OA$ de cet arc capable.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Coniques — Construction d'une ellipse (méthode du jardinier et au compas) : Une **ellipse** de foyers F_1 et F_2 est le lieu géométrique des points M du plan tels que la somme des distances aux deux foyers est constante :

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

On fixe $F_1F_2 = 2c = 6$ cm et la longueur totale de corde $2a = 10$ cm.

1. Expliquer comment construire point par point cette ellipse au **compas** (sans ficelle !) en découpant la longueur 10 cm en deux rayons r_1 et $r_2 = 10 - r_1$. Donner 3 paires $(r_1; r_2)$ valides et expliquer pour quelles valeurs limites de r_1 les deux cercles ne se coupent plus.
2. Calculer le demi-grand axe a et le demi-petit axe $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ de cette ellipse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Coniques — Parabole et hyperbole :

1. **Parabole :** On donne un point fixe F (le *foyer*) et une droite horizontale d (la *directrice*) situés à 4 cm l'un de l'autre. La parabole est le lieu des points M équidistants de F et de d ($MF = \text{dist}(M; d)$).
   - Comment construire au compas et à l'équerre les points de la parabole situés à une distance $y = 3$ cm au-dessus de d ?
   - Quelles sont les coordonnées du **sommet** S de la parabole (en plaçant d sur $y = 0$ et F en $(0; 4)$) ?
2. **Hyperbole :** Une hyperbole de foyers F_1 et F_2 ($F_1F_2 = 10$ cm) est le lieu des points M tels que $|MF_1 - MF_2| = 6$ cm. Donner 3 couples de rayons $(r_1; r_2)$ à utiliser au compas pour construire des points de la branche droite (où $MF_1 - MF_2 = +6$ cm).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

L'échelle qui glisse contre un mur (lieu d'un point fixe sur l'échelle) : Une échelle rectiligne $[AB]$ de longueur fixe $L = 4{,}0$ m est appuyée contre un mur vertical (Oy) et repose sur un sol horizontal (Ox). Elle glisse lentement en gardant le sommet A collé au mur et le pied B collé au sol.

1. Quel est le **lieu géométrique** décrit par le **milieu** M de l'échelle pendant toute sa chute ? *(Indice : penser à la propriété de la médiane issue de l'angle droit dans le triangle rectangle OAB.)*
2. Quelle est la longueur totale de la trajectoire parcourue par le point M entre la position verticale ($B = O$) et la position à plat au sol ($A = O$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Spirale d'Archimède et développante de carré :

1. **Spirale d'Archimède :** Un point M tourne autour d'un pôle O à vitesse angulaire constante tout en s'éloignant de O à vitesse radiale constante, de sorte que son rayon polaire vaut $r(\theta) = 1 \text{ cm} \times \frac{\theta}{90^\circ}$ (il s'éloigne de 1 cm tous les 90°). Calculer les rayons r pour $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ, 720^\circ$, et préciser l'espacement entre deux spires successives.
2. **Développante d'un carré (enroulement d'une ficelle) :** Une ficelle de longueur $L = 8$ cm est attachée au sommet A d'un carré fixe $ABCD$ de côté 2 cm, et tendue le long de $[DA]$ (vers l'extérieur au-delà de A). On enroule la ficelle tendue autour du carré dans le sens $A \to B \to C \to D$. Décrire les 4 **arcs de cercle** successifs tracés par le bout de la ficelle (centres et rayons) et calculer la longueur totale de cette spirale.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

La cycloïde (trajectoire d'une valve de vélo) : Une roue circulaire de rayon $R = 30$ cm roule sans glisser sur une route horizontale rectiligne. On suit la trajectoire d'un point M fixé sur le pneu (initialement au contact du sol en $O(0; 0)$).

1. Sur une distance au sol d'un tour complet de roue, quelle est la **longueur de la base d'une arche** de cycloïde ?
2. Quelle est l'**altitude maximale** atteinte par M (et pour quelle distance parcourue par le centre de la roue) ?

3. Comment construire géométriquement la position de M après un **quart de tour** ($90°$) de la roue ? Calculer les coordonnées exactes de M à cet instant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse — Le cercle d'Apollonius : Dans un plan, on donne deux points fixes $A(-3;0)$ et $B(3;0)$ ($AB = 6$). On cherche le lieu géométrique des points $M(x;y)$ tels que le rapport des distances soit constant et égal à 2 :

$$\frac{MA}{MB} = 2 \quad (\text{soit } MA = 2\,MB)$$

1. Trouver les **deux points I et J** de la droite (AB) (axe Ox) qui vérifient $MA = 2\,MB$ (l'un entre A et B, l'autre à droite de B).
2. En écrivant $MA^2 = 4\,MB^2$ en coordonnées $(x;y)$, démontrer que le lieu des points M est exactement le **cercle de diamètre** $[IJ]$ (appelé *cercle d'Apollonius*) ! Préciser son centre et son rayon.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Construis tous les points à 4 cm d'un point O donné.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Construis tous les points équidistants de deux points distincts A et B.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Construis les points situés à 3 cm d'une droite d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

On donne un cercle de centre O et un point A extérieur. Sur quel cercle auxiliaire trouve-t-on les points de tangence depuis A ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Dans un angle, construis les points intérieurs à égale distance de ses côtés.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

A et B sont distants de 10 cm. Où construire P à 6 cm de A et à 4 cm de B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Construis le lieu des points qui voient le segment AB sous un angle droit.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Deux points A et B sont à 12 cm. Peut-on construire P à 3 cm de A et 7 cm de B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Construis le lieu des points dont la projection orthogonale sur d est un point fixé M de d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Construis un cercle de rayon 2 cm tangent à une droite d en un point T donné.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On donne les points $A(0;0)$, $B(8;0)$ et $C(0;6)$.

1. Expliquer comment construire le cercle passant par A, B et C.
2. Déterminer son centre et son rayon par le calcul.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

On considère le cercle de centre $O(0;0)$ et de rayon 5, et le point $A(3;4)$ de ce cercle.

1. Vérifier que A est sur le cercle.
2. Comment construire la tangente au cercle en A ?
3. Déterminer son équation.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

D'un point P situé à 13 cm du centre d'un cercle de rayon 5 cm, on trace les deux tangentes au cercle.

1. Expliquer comment construire ces tangentes avec le cercle de Thalès.
2. Calculer la longueur de chaque segment de tangente (de P au point de contact).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux droites parallèles d_1 et d_2 sont distantes de 6 cm.

1. Quel est le rayon d'un cercle tangent à d_1 et à d_2 ?
2. Quel est le lieu des centres de ces cercles ?
3. On ajoute un point P situé entre les droites, à 1 cm de d_1. Combien de cercles tangents aux deux droites passent par P ? Comment les construire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Un segment $[AB]$ mesure 10 cm.

1. Quel est le lieu des points P tels que $\widehat{APB} = 90^\circ$?
2. Quels points de ce lieu sont à 6 cm de A ? À quelle distance de B sont-ils ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un triangle est rectangle, de côtés 6, 8 et 10 cm.

1. Comment construit-on le cercle inscrit ?
2. Montrer que son rayon vaut $r = \frac{a+b-c}{2}$ pour un triangle rectangle (côtés de l'angle droit a, b ; hypoténuse c), puis le calculer.
3. Vérifier avec la formule $\mathcal{A} = r \times \frac{\text{périmètre}}{2}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On construit une ellipse avec la « méthode du jardinier » : une ficelle de 10 cm est fixée en deux points F_1 et F_2 distants de 8 cm ; on trace la courbe en gardant la ficelle tendue avec un crayon.

1. Quelle propriété ont les points M de l'ellipse ?
2. Calculer la longueur du grand axe et du petit axe.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On cherche le lieu des points $M(x;y)$ équidistants du point $F(0;1)$ et de la droite $d : y = -1$.

1. Exprimer MF^2 et le carré de la distance de M à d.
2. En déduire l'équation du lieu. De quelle courbe s'agit-il ?
3. Vérifier avec le point $(2;1)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On donne un segment $[AB]$ de 6 cm.

1. Décrire le lieu des points situés à exactement 2 cm du segment $[AB]$ (distance au point le plus proche du segment).
2. Calculer la longueur totale de ce lieu.
3. Calculer l'aire de la région des points à au plus 2 cm du segment.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On donne une droite d et un point P situé à 3 cm de d. On cherche les cercles de rayon r tangents à d et passant par P.

1. Sur quels lieux se trouvent leurs centres ?
2. Combien y a-t-il de solutions si $r = 1$ cm ? $r = 1{,}5$ cm ? $r = 4$ cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site