Accent sur le second degré — Exercices Physique 11e HarmoS

Exercice 1

Discriminant Δ et nombre de racines : On considère l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Calculer Δ et résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des trois équations suivantes :

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0$
2. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
3. $x^2 + 3x + 5 = 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Étude complète d'une parabole (forme canonique, sommet, axe) : Soit la fonction quadratique $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$.

1. Écrire $f(x)$ sous **forme canonique** $a(x - \alpha)^2 + \beta$, et en déduire les coordonnées du **sommet** S, l'équation de l'**axe de symétrie** et l'orientation (concavité) de la parabole.
2. Déterminer les points d'intersection de la parabole avec l'axe Ox ($f(x) = 0$) et l'axe Oy ($f(0)$).
3. En déduire le tableau de variation de f et les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Équation quadratique avec paramètre m : On considère l'équation d'inconnue x et de paramètre réel m :

$$x^2 - 2mx + (m + 2) = 0$$

1. Calculer le discriminant Δ en fonction de m, puis le factoriser.
2. Discuter, selon les valeurs de m, le **nombre de solutions réelles** de cette équation (à l'aide d'un tableau de signes de $\Delta(m)$).
3. Donner la solution lorsque $m = 2$ et lorsque $m = -1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Relations de Viète (somme et produit des racines) : Pour toute équation $ax^2 + bx + c = 0$ admettant deux racines x_1 et x_2, on rappelle les relations de Viète :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

1. Sans calculer les racines de $3x^2 - 12x + 5 = 0$ (vérifier d'abord que $\Delta > 0$), calculer directement :
   - $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 x_2$;
   - $x_1^2 + x_2^2$;
   - $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 13 et le produit vaut 36 en écrivant l'équation du second degré associée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Tangente à une parabole passant par une pente donnée (critère $\Delta = 0$) : On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - 3x + 4$.

1. On cherche la droite d de **pente** $m = 1$ (donc d'équation $y = x + h$) qui est **tangente** à la parabole $\mathcal{P}$. En écrivant l'équation aux abscisses d'intersection $x^2 - 3x + 4 = x + h$, quelle condition sur le discriminant Δ traduit la tangence (un unique point de contact double) ?
2. Calculer h, en déduire l'équation de la tangente et les coordonnées exactes du **point de tangence** T.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Tangentes à une parabole issues d'un point extérieur : On considère la parabole $\mathcal{P} : y = x^2$ et le point extérieur $A(1; -3)$ (situé sous la parabole).

1. Écrire l'équation générale d'une droite non verticale passant par $A(1; -3)$ et de pente m : $y = m(x - 1) - 3$.
2. En écrivant que cette droite est tangente à $y = x^2$ ($\Delta = 0$), montrer que les pentes m des deux tangentes possibles vérifient l'équation $m^2 - 4m - 12 = 0$.
3. En déduire les équations des **deux tangentes** à $\mathcal{P}$ passant par $A(1; -3)$ et leurs deux points de tangence.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Problème physique du second degré (trajectoire parabolique et obstacle) : Un ballon est tiré depuis le sol ($x = 0, y = 0$) et suit la trajectoire parabolique :

$$y(x) = -0{,}04x^2 + 0{,}8x$$

où x est la distance horizontale et y la hauteur (en mètres).

1. À quelle distance retombe-t-il au sol ($y = 0$), et quelle hauteur maximale atteint-il ?
2. Un mur de hauteur 2,5 m est situé à $x = 5$ m du point de tir. Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?
3. Sur quel intervalle de distances x le ballon se trouve-t-il à une hauteur d'au moins 3,0 m ($y(x) \geq 3{,}0$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Équations bicarrées (changement de variable $X = x^2$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes en posant $X = x^2$ (avec $X \geq 0$) :

1. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
2. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Modélisation par une équation du second degré (débits en parallèle) : Deux pompes A et B fonctionnant ensemble remplissent un bassin en 6 **heures**.

Si la pompe A fonctionne seule, elle met t heures pour remplir le bassin ; la pompe B seule est plus lente et met 5 **heures de plus** que A (soit $t + 5$ heures).

1. Sachant que les débits s'additionnent ($\frac{1}{t} + \frac{1}{t+5} = \frac{1}{6}$), montrer que t vérifie l'équation $t^2 - 7t - 30 = 0$.
2. Résoudre cette équation et en déduire la durée de remplissage de chaque pompe prise séparément.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Problème de synthèse (paramètre, Δ et relations de Viète) : On considère l'équation du second degré :

$$(E_m) : x^2 - (m + 1)x + (m - 2) = 0$$

1. Montrer que le discriminant $\Delta = (m-1)^2 + 8$, et en déduire que l'équation (E_m) admet **toujours deux racines réelles distinctes** x_1 **et** x_2, quel que soit $m \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer la somme $S = x_1 + x_2$ et le produit $P = x_1 x_2$ en fonction de m.
3. Pour quelles valeurs de m les deux racines x_1 et x_2 sont-elles **toutes les deux strictement positives** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Calcule le discriminant de $2x^2 - 5x + 2 = 0$, puis ses racines.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Résous $3x^2 + 12x + 12 = 0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une équation du second degré a un discriminant négatif. Combien a-t-elle de solutions réelles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Écris $x^2 + 8x + 11$ en forme canonique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Quel est le sommet de $f(x) = -3(x-2)^2 + 7$ et donne-t-il un maximum ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Trouve les zéros de $f(x) = x^2 - 16$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Une parabole a pour racines -2 et 6. Quelle est l'abscisse de son axe ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un projectile suit $h(t) = -5t^2 + 15t$ pour t ≥ 0, jusqu'à son retour au sol. Quand retombe-t-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Trouve les valeurs de x telles que $(x-4)(x+1) > 0$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trouve une équation quadratique de coefficient dominant 1 avec racines 3 et -5.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Résoudre à l'aide du discriminant :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 + 3x - 5 = 0$
3. $x^2 + 4x + 7 = 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
2. En déduire le sommet de la parabole et la valeur minimale de f.
3. Résoudre $f(x) = 0$ (valeurs exactes).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un rectangle a un périmètre de 40 m et une aire de 96 m^2.

1. En notant x sa longueur, exprimer sa largeur, puis écrire une équation.
2. Résoudre et donner les dimensions.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Une balle est lancée vers le haut depuis une hauteur de 1,5 m. Sa hauteur (en m) après t secondes est $h(t) = -5t^2 + 20t + 1{,}5$.

1. Quand la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?
2. Quand retombe-t-elle au sol (au centième de seconde) ?
3. Pendant combien de temps est-elle au-dessus de 16,5 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Relations de Viète : si x_1 et x_2 sont les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$, alors $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$.

1. Trouver de tête les solutions de $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2. Trouver deux nombres dont la somme vaut 17 et le produit 72.
3. L'une des solutions de $x^2 + bx - 12 = 0$ est 3. Trouver l'autre et b.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $x^2 + mx + 9 = 0$:

1. admet-elle une seule solution (double) ? Préciser la solution.
2. admet-elle deux solutions distinctes ?
3. n'admet-elle aucune solution ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Résoudre les inéquations :

1. $x^2 - x - 6 < 0$
2. $-x^2 + 4x \geq 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Déterminer les points d'intersection de la parabole $y = x^2$ et de la droite $y = x + 2$. Faire une esquisse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Résoudre l'équation $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ en posant $X = x^2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un cycliste parcourt 60 km. S'il roulait 5 km/h plus vite, il mettrait 36 minutes de moins.

Calculer sa vitesse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site