Quadrilatères — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

Théorème de Varignon : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe **quelconque**, et soient I, J, K, L les milieux respectifs de ses côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. En appliquant le théorème des milieux dans les triangles ABC et ADC, démontrer que le quadrilatère $IJKL$ est toujours un **parallélogramme**.
2. Quelle condition doivent satisfaire les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de $ABCD$ pour que $IJKL$ soit :
   a) un **rectangle** ? b) un **losange** ? c) un **carré** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Compléter le tableau récapitulatif des propriétés des diagonales pour les quadrilatères particuliers (*Toujours* / *Pas toujours*) :

1. **Parallélogramme**
2. **Rectangle**
3. **Losange**
4. **Carré**
5. **Cerf-volant (deltoïde)**

Pour chacun, préciser si les diagonales : (a) se coupent en leur milieu ; (b) ont la même longueur ; (c) sont perpendiculaires.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Dans un **cerf-volant (deltoïde)** $ABCD$ symétrique par rapport à la diagonale (AC), les côtés mesurent $AB = AD = 10$ cm et $CB = CD = 17$ cm, et la petite diagonale transversale mesure $BD = 16$ cm.

1. Justifier que $(AC) \perp (BD)$ au point H, milieu de $[BD]$.
2. Calculer les longueurs AH et CH, puis la grande diagonale AC et l'aire du cerf-volant.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Dans un **parallélogramme** $ABCD$ tel que $AB = 12$ cm, $AD = 7$ cm et $\widehat{BAD} = 60°$:

1. Calculer les mesures des trois autres angles intérieurs du parallélogramme.
2. En traçant la hauteur $[DH]$ issue de D sur (AB), calculer les valeurs exactes de AH, de la hauteur DH, de l'aire du parallélogramme et de la diagonale BD.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on place les quatre points : $A(1;1)$, $B(6;2)$, $C(5;7)$ et $D(0;6)$.

1. Démontrer par le calcul des coordonnées des milieux et des longueurs que $ABCD$ est un **losange**.
2. Vérifier si $ABCD$ est aussi un **carré** (en comparant les diagonales AC et BD).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Un **trapèze rectangle** $ABCD$ (angle droit en A et en D) a pour grande base $AB = 14$ cm, petite base $CD = 6$ cm, et hauteur $AD = 6$ cm. On place un point M sur le côté vertical $[AD]$ à distance $AM = x$ (avec $0 \leq x \leq 6$).

1. Calculer l'aire totale du trapèze $ABCD$ et la longueur du côté oblique $[BC]$.
2. Exprimer en fonction de x l'aire du triangle ABM et celle du triangle DMC, puis trouver pour quelle valeur de x ces deux triangles ont la **même aire**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Dans un trapèze $ABCD$ de bases parallèles $[AB]$ et $[CD]$ ($AB = 15$ cm, $CD = 10$ cm), les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O.

1. Montrer que les triangles OAB et OCD sont **semblables** (configuration papillon de Thalès).
2. Si la hauteur totale du trapèze vaut $h = 10$ cm, quelle est la hauteur h_1 du triangle OCD et la hauteur h_2 du triangle OAB issues de O ? En déduire l'aire de OAB et celle de OCD.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Soit un rectangle $ABCD$ de longueur $AB = 8$ cm et de largeur $BC = 6$ cm. On trace la diagonale $[AC]$, puis on projette orthogonalement B sur (AC) en H et D sur (AC) en K.

1. Calculer la longueur de la diagonale AC et la hauteur $BH = DK$.
2. Calculer les longueurs AK et AH (ou HC), puis en déduire la distance HK entre les deux pieds des hauteurs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Démontrer que dans **tout losange** $ABCD$ de côté a et de diagonales $d_1 = AC$ et $d_2 = BD$, on a la relation :

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

Puis l'appliquer pour trouver la deuxième diagonale d'un losange de côté $a = 15$ cm dont une diagonale mesure 24 cm.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Un quadrilatère $ABCD$ est tel que ses quatre côtés sont tangents à un même cercle (**quadrilatère circonscrit** à un cercle). Démontrer le **théorème de Pitot** : la somme des longueurs de deux côtés opposés est égale à la somme des longueurs des deux autres côtés opposés :

$$AB + CD = BC + DA$$

(Indice : utiliser l'égalité des deux segments de tangence issus d'un même sommet vers le cercle.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Dans un parallélogramme, un angle vaut 112°. Combien valent les trois autres ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Un parallélogramme a deux diagonales de même longueur. Quelle figure particulière est-ce ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Un quadrilatère a pour sommets A(0, 0), B(6, 0), C(8, 4), D(2, 4), dans cet ordre. Quelle propriété permettent d'établir les vecteurs AB et DC ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Un losange a un angle de 90°. Que devient-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Donne un exemple de rectangle qui n'est pas un carré.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Un trapèze a des bases de 8 et 14 cm. Quelle est la longueur du segment joignant les milieux des deux côtés non parallèles ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Dans un rectangle de diagonale AC mesurant 18 cm, quelle est la distance du centre à un sommet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Trois angles d'un quadrilatère convexe valent 72°, 104° et 97°. Trouve le quatrième.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

ABCD est un losange. L'angle BAD vaut 76°. Quelle est la mesure de BAC ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Quel quadrilatère convexe a nécessairement ses diagonales perpendiculaires et de même longueur, si elles se coupent aussi en leur milieu ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

$ABCD$ est un parallélogramme avec $A(1;1)$, $B(5;2)$ et $C(6;5)$.

1. Calculer les coordonnées de D.
2. Calculer les coordonnées du centre (intersection des diagonales).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Un losange a des diagonales de 12 cm et 16 cm.

1. Calculer son aire.
2. Calculer la longueur de ses côtés.
3. Calculer sa hauteur.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un trapèze isocèle a des bases de 16 cm et 10 cm et des côtés obliques de 5 cm.

1. Calculer sa hauteur.
2. Calculer son aire.
3. Calculer la longueur de ses diagonales.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Les angles d'un quadrilatère convexe sont proportionnels à 2, 3, 4 et 6. Calculer ces angles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

On joint les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque $ABCD$ dont les diagonales mesurent 10 cm et 14 cm.

1. Quelle est la nature du quadrilatère obtenu (théorème de Varignon) ?
2. Calculer son périmètre.
3. À quelle condition sur $ABCD$ ce quadrilatère est-il un rectangle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Un carré est inscrit dans un cercle de rayon 5 cm.

1. Calculer son côté et son aire.
2. Quelle fraction de l'aire du disque occupe-t-il (au centième) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un parallélogramme a des côtés de 6 cm et 5 cm qui forment un angle de 30°.

Calculer sa hauteur relative au côté de 6 cm et son aire ($\sin 30^\circ = 0{,}5$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

On donne $A(0;0)$, $B(4;3)$, $C(8;0)$ et $D(4;-3)$.

1. Calculer les longueurs des quatre côtés. Quelle est la nature de $ABCD$?
2. Calculer les diagonales et l'aire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un rectangle a des diagonales de 10 cm et un côté de 6 cm.

1. Calculer l'autre côté.
2. Calculer l'angle aigu formé par les diagonales sachant que les demi-diagonales et le petit côté forment un triangle isocèle de côtés 5, 5 et 6 (utiliser $\cos\alpha = \frac{5^2+5^2-6^2}{2\times5\times5}$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un cerf-volant (quadrilatère $ABCD$ avec $AB = AD$ et $CB = CD$) a des diagonales de 30 cm et 40 cm.

1. Quelle propriété ont ses diagonales ?
2. Calculer son aire.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site