PPMC et PGDC et problèmes — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer PGDC$(2772; 1540)$, puis en déduire PPMC$(2772; 1540)$.
2. Rendre irréductible la fraction $\dfrac{1540}{2772}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Deux nombres entiers naturels a et b $(0 < a < b)$ vérifient :

$$\text{PGDC}(a; b) = 18 \qquad \text{et} \qquad \text{PPMC}(a; b) = 540$$

Trouver **tous les couples** $(a; b)$ solutions.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Un fleuriste dispose de 315 roses rouges, 420 tulipes jaunes et 525 marguerites blanches. Il souhaite confectionner le **plus grand nombre possible** de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

1. Combien de bouquets pourra-t-il composer ?
2. Quelle sera la composition exacte de chaque bouquet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Une caisse parallélépipédique intérieure mesure 140 cm × 112 cm × 84 cm. On veut la remplir **entièrement**, sans aucun espace vide, avec des **cubes identiques** les plus grands possibles (d'arête entière en centimètres).

1. Quelle doit être la longueur de l'arête de chaque cube ?
2. Combien de cubes la caisse contiendra-t-elle au total ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Deux satellites tournent autour d'une planète sur des orbites circulaires coplanaires et dans le même sens. Le satellite A met 14 heures pour accomplir une orbite complète, tandis que le satellite B met 22 heures. À l'instant $t = 0$, ils sont alignés du même côté de la planète.

1. Au bout de combien d'heures (et de jours + heures) seront-ils à nouveau alignés à leur position de départ ?
2. Combien de révolutions aura alors accomplies chaque satellite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

1. Quel est le plus petit entier naturel non nul qui, divisé par 12, 15 et 28, donne à chaque fois un **reste égal à** 5 ?
2. Quel est le plus grand entier inférieur à 1000 ayant cette même propriété ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Trois coureurs s'entraînent sur une piste circulaire. Ils partent ensemble de la ligne de départ :

- Léo fait un tour en 72 secondes ;
- Mia fait un tour en 80 secondes ;
- Noah fait un tour en 90 secondes.

1. Au bout de combien de minutes repasseront-ils **tous les trois ensemble** la ligne de départ pour la première fois ?
2. Combien de tours aura effectués chacun des trois coureurs à cet instant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Lors d'une division euclidienne de deux entiers A et B, on note :

- 142 divisé par d laisse un reste de 10 ;
- 187 divisé par le même diviseur d laisse un reste de 11.

Déterminer toutes les valeurs possibles du diviseur d.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Calculer PGDC$(a;b)$ et PPMC$(a;b)$ pour les expressions littérales suivantes (où x, y, z désignent des nombres premiers distincts) :

$$a = x^3y^2z \qquad \text{et} \qquad b = x^2y^4$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Un artisan souhaite carreler une pièce rectangulaire de 4,80 m par 3,36 m avec des carreaux carrés identiques (de côté entier en cm, sans découpe et sans joint), et souhaite dépenser le moins possible :

- Type 1 : carreaux de 24 cm de côté à 3,20 CHF pièce ;
- Type 2 : carreaux de 48 cm de côté à 13,50 CHF pièce.

1. Les deux formats conviennent-ils pour carreler la pièce sans aucune découpe ? Quel est le plus grand côté entier possible (théorique) pour un carreau sans découpe ?
2. Calculer le nombre de carreaux et le coût total pour chacun des deux types, puis indiquer le choix le plus économique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Deux signaux se déclenchent ensemble à midi. Ils se répètent toutes les 20 et 30 minutes. Après combien de minutes coïncident-ils à nouveau ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Répartis 20 ciseaux et 30 tubes de colle en un maximum de trousses identiques, sans reste. Décris une trousse.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Détermine le PGDC de 55 et 24 par divisions euclidiennes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Écris le plus petit nombre positif divisible par 55 et 24.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une planche mesure 20 dm sur 30 dm. Quelle est la plus grande longueur de côté d'un carreau carré entier qui pave la planche avec une grille parallèle aux bords ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Trouve deux entiers distincts dont le PGDC est 10 et le PPMC est 350.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Le PGDC de deux nombres est 10. Leur PPMC vaut 770. Un des nombres vaut 70. Quel est l'autre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Trois voyants clignotent toutes les 20, 30 et 10 secondes. Ils viennent de clignoter ensemble. Quel est le délai jusqu'à la prochaine coïncidence ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Deux entiers A et B ont pour PGDC 14. Que vaut le PGDC de 3A et 3B ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Trouve le plus petit entier $n > 0$ tel que $n/12$, $n/18$ et $n/20$ soient tous entiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

1. Calculer $\mathrm{PGDC}(1\,071 ; 462)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. En déduire $\mathrm{PPMC}(1\,071 ; 462)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

À partir des divisions de l'exercice précédent ($1\,071 = 462 \times 2 + 147$ et $462 = 147 \times 3 + 21$), trouver des entiers u et v tels que $1\,071u + 462v = 21$ (identité de Bézout).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trouver tous les couples d'entiers $(a ; b)$ avec $a < b$, $a + b = 168$ et $\text{PGDC}(a ; b) = 24$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Deux satellites font le tour d'une planète en 84 minutes et en 126 minutes. Ils sont alignés avec la planète à midi.

Quand seront-ils de nouveau dans cette configuration ? Combien de tours chacun aura-t-il faits ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Une caisse de 140 cm $\times$ 105 cm $\times$ 70 cm doit être remplie exactement de cubes identiques, les plus grands possibles.

1. Quelle est l'arête des cubes ?
2. Combien de cubes faut-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Quel est le plus petit entier naturel qui, divisé par 12, 18 et 24, donne respectivement les restes 11, 17 et 23 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Calculer $\frac{5}{84} + \frac{7}{90}$ en utilisant le plus petit dénominateur commun.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. Démontrer que deux entiers consécutifs n et $n + 1$ sont toujours premiers entre eux.
2. Que peut valoir $\text{PGDC}(n ; n + 2)$? Donner un exemple de chaque cas.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Deux roues dentées de 30 et 42 dents s'engrènent.

1. Après combien de dents engrenées retrouve-t-on la position initiale ?
2. Combien de tours chaque roue a-t-elle alors effectués ?
3. Pourquoi les horlogers préfèrent-ils des nombres de dents premiers entre eux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Deux entiers a et b ont pour PGDC 12 et pour PPMC 360. On sait que $a = 72$.

1. Calculer b.
2. Vérifier en calculant directement le PGDC et le PPMC.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site