Nombres premiers et décomposition — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

Tester la primalité des quatre nombres suivants à l'aide du test jusqu'à $\sqrt{n}$ (s'ils sont composés, donner leur décomposition en facteurs premiers) :

1. 293
2. 323
3. 391
4. 409

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Décomposer les grands entiers suivants en produits de facteurs premiers :

1. 5040
2. 9240
3. 10 800

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

On pose $A = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

1. Calculer le **nombre total de diviseurs** de A.
2. À partir de la décomposition de A, trouver le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A \times k$ soit un carré parfait, et le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $\dfrac{A}{m}$ soit un cube parfait.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

1. Trouver le **plus petit entier naturel** ayant exactement 18 **diviseurs**.
2. Combien de diviseurs possède 10^{10} ? *(Indice : décomposer 10^{10} en facteurs premiers.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Soit un entier naturel $n \geq 2$ tel que $n^2 + n$ soit un nombre premier.

1. Factoriser $n^2 + n$ et expliquer pourquoi **aucun** entier $n \geq 2$ ne peut rendre $n^2 + n$ premier.
2. En est-il de même pour $n^2 - 1$ lorsque $n \geq 3$? Et pour $n = 2$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

1. Écrire $10!$ ($10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$) sous la forme d'un produit de facteurs premiers.
2. Par combien de **zéros** se termine l'écriture décimale de $10!$? Et par combien de zéros se termine $25!$? *(Indice : compter les facteurs 2 et 5.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Une énigme arithmétique :

- Trois frères ont des âges entiers dont le produit vaut 36.
- La somme de leurs âges est égale au numéro de la maison d'en face (que l'interlocuteur connaît, mais hésite encore !).
- L'aîné joue du piano.

Expliquer comment retrouver avec certitude les âges des trois frères (en listant toutes les décompositions de 36 en produit de 3 entiers).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

On appelle **nombre de Mersenne** tout nombre de la forme $M_p = 2^p - 1$.

1. Calculer M_2, M_3, M_5, M_7 et vérifier lesquels sont premiers.
2. Calculer $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047$ et montrer qu'il n'est **pas** premier en vérifiant sa divisibilité par 23.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Soit n un entier tel que $n = 2^a \times 3^b$ (avec $a, b \geq 1$). Sachant que n possède exactement 12 **diviseurs** et que la moitié de n possède 8 **diviseurs**, déterminer les exposants a et b, puis la valeur de n.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

À l'aide des décompositions en facteurs premiers (sans poser les grands produits), simplifier l'expression :

$$F = \frac{1764 \times 1250}{70 \times 35}$$

puis calculer exactement $\sqrt{F}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Décide si 107 est premier en limitant le nombre de divisions à tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Réfute l'affirmation « 119 est premier » à l'aide d'une égalité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Décompose 300 en facteurs premiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Liste les nombres premiers compris entre 43 et 63, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Donne un composé impair dont le plus petit facteur premier est 11.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Combien de diviseurs positifs possède 484 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quel est le plus petit entier par lequel multiplier 22 pour obtenir un carré parfait ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Trouve deux nombres premiers dont le produit est 1177.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un entier positif a pour facteurs premiers uniquement 3 et 7. Il a exactement 4 diviseurs et est divisible par 21. Trouve-le.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Donne la décomposition première de 2025 et indique si c'est un carré parfait.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Les nombres 211, 221, 401 et 403 sont-ils premiers ? Préciser jusqu'à quel nombre premier il faut tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

1. Décomposer $10! = 1 \times 2 \times ... \times 10$ en produit de facteurs premiers.
2. Combien de diviseurs possède 10! ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trouver le plus petit entier ayant exactement 12 diviseurs. Justifier en étudiant les formes possibles.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

1. Montrer que $n^2 - 1$ n'est premier que pour $n = 2$.
2. Montrer que $n^2 + 4n + 3$ n'est jamais premier pour $n \geq 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

1. Calculer $p^2 - 1$ pour $p = 5, 7, 11, 13$. Que remarque-t-on ?
2. Démontrer que pour tout premier $p > 3$, $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

1. Vérifier sur $(3; 5)$, $(5; 7)$ et $(11; 13)$ que le produit de deux nombres premiers jumeaux augmenté de 1 est un carré parfait.
2. Le démontrer en général.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

On donne $a = 2^4 \times 3^2 \times 7$ et $b = 2^2 \times 3^5 \times 5$.

1. Déterminer PGDC$(a; b)$ et PPMC$(a; b)$ sous forme factorisée.
2. Vérifier que PGDC $\times$ PPMC $= a \times b$ en comparant les exposants.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un nombre est **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

1. Vérifier que 28 est parfait.
2. On admet que si $2^p - 1$ est premier, alors $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait. Calculer N pour $p = 5$ et vérifier qu'il est parfait en calculant la somme de ses diviseurs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

1. Factoriser $2^{12} - 1$ en utilisant $a^2 - b^2$, puis décomposer en facteurs premiers.
2. En déduire tous les nombres premiers qui divisent 4 095.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

1. À l'aide du crible d'Ératosthène, combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 100 ?
2. Pourquoi, pour cribler jusqu'à 100, suffit-il de barrer les multiples de 2, 3, 5 et 7 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site