Fonctions quadratiques et diverses — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

On considère la fonction quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x)$ peut s'écrire sous **forme canonique** $f(x) = (x-3)^2 - 4$, et sous **forme factorisée** $f(x) = (x-1)(x-5)$.
2. Grâce aux formes les plus adaptées, donner :
   a) les coordonnées du **sommet** S et l'axe de symétrie de la parabole ;
   b) l'ordonnée à l'origine (intersection avec (Oy)) ;
   c) les **zéros** de f (intersections avec (Ox)) et le tableau de variations.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Déterminer l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ d'une parabole sachant que son sommet est le point $S(2;9)$ et qu'elle passe par le point $A(5;0)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

On jette une pierre du haut d'une falaise. Sa hauteur $h(t)$ (en mètres au-dessus de la mer) en fonction du temps t (en secondes) est donnée par :

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 40$$

1. Quelle est la hauteur de la falaise (hauteur à $t = 0$) ?
2. Vérifier que $h(t) = -5(t-1)^2 + 45$, puis en déduire la **hauteur maximale** atteinte par la pierre et l'instant où elle l'atteint.
3. Factoriser $h(t) = -5(t+2)(t-4)$ en vérifiant le développement, puis déterminer à quel instant $t > 0$ la pierre tombe dans l'eau ($h(t) = 0$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Pour chacune des quatre fonctions suivantes, donner le **domaine de définition** $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ (valeurs de x pour lesquelles le calcul est possible) :

1. $f_1(x) = \dfrac{3x+1}{2x-8}$
2. $f_2(x) = \dfrac{5}{x^2-9}$
3. $f_3(x) = \sqrt{3x-12}$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Un architecte conçoit un arc parabolique d'équation $y = ax^2 + h$ dont le sommet est au centre en $(0;8)$ (en mètres) et qui repose au sol ($y = 0$) aux deux piliers situés en $(-4;0)$ et $(4;0)$.

1. Déterminer la valeur exacte de a et h.
2. Un camion de largeur totale 3 m (centré au milieu, donc occupant $x \in [-1{,}5;1{,}5]$) et de hauteur 6,5 m peut-il passer sous cet arc ? Justifier par le calcul.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{6}{x-2}$ définie pour $x \neq 2$.

1. Calculer $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ et $f(8)$.
2. Résoudre les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = -12$.
3. Existe-t-il un réel x tel que $f(x) = 0$? Expliquer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x - 2$ et de la droite d'équation $y = x + 4$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Lors d'une expérience de physique sur le pendule simple, la période T (en secondes) est liée à la longueur L du fil (en mètres) par la fonction racine carrée $T(L) = 2\sqrt{L}$ (en utilisant l'approximation $\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \approx 2$ car $\sqrt{9{,}81} \approx \pi$).

1. Calculer la période d'un pendule de longueur $L = 0{,}25$ m, puis $L = 1{,}00$ m et $L = 2{,}25$ m.
2. Quelle longueur de fil faut-il choisir pour obtenir une horloge battant exactement la période $T = 4{,}0$ s ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Une entreprise fabrique et vend x objets par jour ($0 \leq x \leq 100$). Le coût total de production vaut $C(x) = x^2 + 20x + 900$ (en CHF), et chaque objet est vendu 100 CHF (donc recette $R(x) = 100x$).

1. Montrer que le bénéfice net $B(x) = R(x) - C(x)$ s'écrit :

$$B(x) = -x^2 + 80x - 900$$

2. Vérifier que $B(x) = -(x-40)^2 + 700$, puis déterminer :
   a) pour quelle quantité x le bénéfice est **maximal**, et quel est ce bénéfice maximal ;
   b) à l'aide de l'équation $-(x-40)^2 + 700 > 0$ (ou factorisation de $x^2 - 80x + 900$), pour quelles quantités entières x l'entreprise est-elle **rentable** ($B(x) > 0$) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

On cherche la somme $S(x)$ d'un nombre réel strictement positif $x > 0$ et de son inverse :

$$S(x) = x + \frac{1}{x}$$

1. Calculer $S(0{,}5)$, $S(1)$, $S(2)$ et $S(4)$.
2. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a toujours $S(x) \geq 2$ *(Indice : calculer $S(x) - 2$ et réduire au même dénominateur pour faire apparaître un carré parfait !).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Calcule $f(-4)$ si $f(x) = x^2 + 6$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Quel est le sommet de $y = (x-4)^2 + 6$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quel est le maximum réel de $f(x) = 6 - (x+4)^2$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Trouve les deux antécédents de 0 par $f(x) = x^2 - 16$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Donne l'axe de symétrie de $y = (x+4)^2 - 6$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Les valeurs de x^2 pour x = 4, 5, 6 augmentent-elles d'un pas constant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Écris $f(x) = x^2 - 8x + 22$ sous forme canonique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Résous $f(x) = 10$ si $f(x) = 6 + (x-4)^2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un rectangle a pour largeur x et longueur 12 − x. Pour quelle largeur son aire est-elle maximale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Les courbes $y = x^2$ et $y = 4x$ ont deux points communs. Donne leurs coordonnées.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire le sommet et l'axe de symétrie.
3. Déterminer les zéros et la forme factorisée.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Déterminer la fonction quadratique dont la parabole coupe l'axe des x en 1 et 3 et passe par $(0;3)$. Donner son sommet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Une balle est lancée verticalement : sa hauteur est $h(t) = -4{,}9t^2 + 19{,}6t$ (en m, t en s).

1. À quel instant atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?
2. Quand retombe-t-elle à son point de départ ?
3. Pendant combien de temps est-elle au-dessus de 14,7 m ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Un vendeur constate que s'il fixe le prix d'un article à p francs, il en vend $200 - 4p$ par semaine ($0 \le p \le 50$).

1. Exprimer la recette hebdomadaire $R(p)$.
2. Quel prix maximise la recette ? Quelle est la recette maximale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Déterminer les points d'intersection de la parabole $y = x^2 - 2x$ et de la droite $y = x + 4$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Résoudre les inéquations :

1. $-x^2 + 5x - 4 \ge 0$
2. $x^2 + 2x + 5 > 0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Pour quelle valeur de k la droite $y = 2x + k$ est-elle tangente à la parabole $y = x^2$? Donner le point de contact.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Déterminer les points d'intersection de l'hyperbole $y = \frac{6}{x}$ et de la droite $y = x + 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Soit $f(x) = \sqrt{4 - x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $f(0)$, $f(-5)$ et $f(4)$.
3. Résoudre $f(x) = 5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On part de la parabole $y = x^2$.

1. Quelle transformation donne la courbe de $y = (x-2)^2 + 3$? Donner le sommet.
2. Et celle de $y = -x^2$? De $y = 2x^2$?
3. Écrire l'équation de la parabole obtenue en translatant $y = x^2$ de 4 vers la gauche et 1 vers le bas, puis la développer.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site