Divers problèmes de géométrie — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

Dans un cercle $\mathcal{C}$, deux cordes $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en un point intérieur P. On donne $PA = 4$ cm, $PB = 9$ cm et $PC = 3$ cm.

1. En utilisant les angles inscrits, démontrer que les triangles PAC et PDB sont **semblables**.
2. En déduire le **théorème des cordes sécantes** ($PA \cdot PB = PC \cdot PD$) et calculer la longueur PD.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Un octogone régulier est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $R = 6$ cm.

1. Décomposer l'octogone en 8 triangles isocèles égaux autour de O et calculer l'angle au centre $\widehat{AOB}$ d'un côté.
2. En utilisant les deux hauteurs ou l'aire d'un triangle ($45°$ est un angle remarquable : $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$), montrer que l'aire exacte de l'octogone vaut $72\sqrt{2}$ **cm**^{2}.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Trois pièces de monnaie circulaires identiques de rayon $R = 2$ cm sont posées à plat sur une table et se touchent deux à deux extérieurement (leurs centres forment un triangle équilatéral $O_1O_2O_3$).

1. Quelle est la longueur du côté et l'aire exacte du triangle équilatéral $O_1O_2O_3$?
2. Calculer l'aire exacte (en fonction de $\sqrt{3}$ et π, puis arrondie au millimètre carré) du **triangle curviligne** coincé entre les trois pièces.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Dans un carré $ABCD$ de côté 10 cm, on inscrit un grand cercle de rayon $R = 5$ cm et, dans l'un des quatre coins, un **petit cercle** tangent à deux côtés consécutifs du carré et tangent extérieurement au grand cercle.

Calculer le **rayon exact** r de ce petit cercle niché dans le coin du carré *(Indication : écrire la distance entre le centre du carré et le sommet A en fonction de $R = 5$ et de r sur la diagonale !).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon $R = 5$.

1. Vérifier par le calcul si les points $A(6; 2)$, $B(-1; 3)$ et $C(5; 4)$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ (ou sont à l'intérieur / à l'extérieur).
2. Déterminer l'équation de la **tangente** au cercle $\mathcal{C}$ au point $A(6; 2)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

On considère une roue de rayon R partiellement enfoncée dans une tranchée horizontale : la largeur de l'ouverture au niveau du sol vaut 24 cm et la flèche (profondeur maximale de la partie enfoncée sous le sol) vaut 8 cm.

Calculer le **rayon** R de la roue *(en posant O le centre de la roue : la distance du centre au sol vaut $R - 8$).*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Sur un segment $[AB]$ de longueur 12 cm, on place un point mobile M (avec $AM = x$, $0 < x < 12$) et on trace au-dessus de (AB) les trois demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AM]$ et $[MB]$. La surface comprise entre le grand demi-cercle et les deux petits s'appelle l'**arbelos d'Archimède** (couteau de cordonnier).

1. Montrer que la longueur totale du contour (périmètre) de l'arbelos est **constante** (indépendante de la position de M) et vaut 12π cm.
2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de l'arbelos en fonction de x, et déterminer la position de M qui rend cette aire **maximale**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Un **triangle isocèle** ABC ($AB = AC = 10$ cm) est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon R, avec une base $BC = 12$ cm.

1. Calculer la hauteur AH issue de A sur $[BC]$.
2. En notant O le centre du cercle circonscrit (situé sur la hauteur (AH)) et $R = OA$, utiliser le théorème de Pythagore dans OBH ($OH = AH - R$) pour calculer exactement le **rayon R du cercle circonscrit**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

On compare les volumes de trois solides inscrits dans un **même cylindre** de rayon R et de hauteur $H = 2R$ (étude d'Archimède) :

1. le cylindre de rayon R et hauteur $2R$;
2. la sphère de rayon R (tangente aux deux bases et à la paroi) ;
3. le cône de rayon R et hauteur $2R$.

Exprimer V_{cylindre}, $V_{\text{sphère}}$ et $V_{\text{cône}}$ en fonction de π et R, puis montrer que leurs volumes sont exactement dans le **rapport** $3 : 2 : 1$ (et vérifier que $V_{\text{cône}} + V_{\text{sphère}} = V_{\text{cylindre}}$) !

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Une échelle (segment $[AB]$ de longueur $L = 6$ m) glisse le long d'un mur vertical $[Oy)$ et d'un sol horizontal $[Ox)$ (A reste sur $[Ox)$ et B reste sur $[Oy)$). On note M le **milieu** de l'échelle $[AB]$.

1. Pour une position quelconque de l'échelle ($OA = 3{,}6$ m, $OB = 4{,}8$ m), calculer la distance OM entre le coin du mur O et le milieu M de l'échelle.
2. Quel **lieu géométrique** décrit exactement le point M pendant que l'échelle glisse du haut jusqu'au sol ? Justifier rigoureusement.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Donne la distance de P$(6, -8)$ à l'axe des abscisses dans un repère orthonormé.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Trouve le milieu du segment d'extrémités $(2, 6)$ et $(8, 12)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Une roue de rayon 6 cm fait trois tours sans glisser. Quelle est la distance exacte parcourue ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

De quel angle tourne l'aiguille des minutes de 10 à 16 minutes ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Une diagonale d'un rectangle forme avec un côté un angle de 30°. Quel angle forme-t-elle avec l'autre côté au même sommet ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Quel angle sépare deux sommets voisins, vu du centre d'un polygone régulier à 8 côtés ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Un cercle mesure 12 cm de diamètre. Un point est à 7 cm du centre. Est-il à l'intérieur ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Deux parallèles sont distantes de 8 cm. Où sont les points à la même distance des deux droites ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

A$(-1,\ 2)$ et B$(7,\ 6)$ sont les extrémités d'un diamètre. Donne le centre et le rayon du cercle.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Deux poteaux verticaux de 5 m et 11 m sont séparés horizontalement par 8 m. Quelle distance sépare leurs sommets ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Un cercle a pour centre $C(2;-1)$ et passe par $A(5;3)$.

1. Calculer son rayon et écrire son équation.
2. Le point $B(-1;3)$ est-il sur ce cercle ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Déterminer les points d'intersection du cercle $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite $y = x + 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Dans un cercle de rayon 13 cm, une corde est située à 5 cm du centre.

1. Calculer sa longueur.
2. À quelle distance du centre faut-il placer une corde de 10 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Calculer l'aire du triangle $A(1;2)$, $B(5;3)$, $C(2;7)$ à l'aide de la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$, où $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$ sont les déplacements de A vers B et de A vers C.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Déterminer par le calcul l'équation du lieu des points équidistants de $A(0;0)$ et $B(4;2)$. De quelle droite s'agit-il ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Déterminer l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $T(-4;3)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle $A(0;0)$, $B(8;0)$, $C(2;6)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Un octogone régulier est inscrit dans un cercle de rayon 1.

1. Il se découpe en 8 triangles isocèles d'angle au sommet $45°$. Calculer l'aire d'un triangle ($\frac{1}{2}r^2 \sin 45°$, avec $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$).
2. En déduire l'aire de l'octogone et la comparer à celle du disque.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un cercle a un rayon de 9 cm. On considère un secteur d'angle $40°$.

Calculer la longueur de l'arc et l'aire du secteur (valeurs exactes).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Un triangle a des côtés de 5, 5 et 6 cm.

1. Calculer son aire.
2. Calculer le rayon de son cercle circonscrit avec $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site