Critères de divisibilité, multiples et diviseurs — Exercices Maths 11e HarmoS

Exercice 1

1. Rappeler comment combiner les critères pour tester la divisibilité par 12, 15, 18 et 36 (et expliquer pourquoi combiner 4 et 6 **ne suffit pas** pour prouver la divisibilité par 24).
2. Déterminer tous les nombres à 5 chiffres de la forme $N = \overline{63a4b}$ qui sont divisibles par 36.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

On utilise le critère de divisibilité par 7 suivant : un entier $10q + u$ (où u est le chiffre des unités et q le nombre des dizaines) est divisible par 7 si et seulement si $q - 2u$ est divisible par 7.

1. Appliquer ce critère itérativement pour tester si 3871 et 5218 sont divisibles par 7.
2. Justifier algébriquement ce critère en calculant $2(10q + u) + (q - 2u)$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Déterminer l'ensemble complet des diviseurs de 216 et celui de 324, puis répondre :

1. Combien de diviseurs possède 216 ? Combien en possède 324 ?
2. Pourquoi 324 a-t-il un nombre **impair** de diviseurs contrairement à 216 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Démontrer à l'aide de factorisations algébriques que pour tout entier naturel n :

1. $A(n) = n^3 - n$ est toujours divisible par 6.
2. $B(n) = (2n + 1)^2 - 1$ est toujours divisible par 8.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Trouver tous les entiers naturels n compris entre 200 et 500 qui vérifient simultanément :

- dans la division par 7, le reste est 4 ;
- dans la division par 9, le reste est 4 ;
- n est impair.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

1. Déterminer la liste de tous les entiers naturels $n \geq 1$ tels que la fraction $\dfrac{18}{n+2}$ soit un **nombre entier**.
2. Quels sont les entiers naturels n tels que la fraction $\dfrac{n+14}{n+2}$ soit un nombre entier ? *(Indice : écrire $n + 14 = (n + 2) + 12$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

On considère l'entier $N = 1000^2 - 1$.

1. Sans poser la multiplication, factoriser N au maximum pour vérifier s'il est divisible par 3, par 9, par 11, par 37 et par 101.
2. Quel est le plus petit nombre premier qui divise $1000^2 + 1$? *(Tester les petits nombres premiers ou remarquer que* $1000^2 + 1 = 1\,000\,001$*.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

Dans une salle de spectacle de moins de 500 places, les spectateurs peuvent être répartis exactement par rangées complètes de 15 places, ou par groupes complets de 18 places, mais si l'on essaie de former des blocs de 12 places, il reste à chaque fois 6 personnes dans la dernière rangée. En revanche, si on ajoute 6 chaises, la salle peut être exactement remplie par blocs de 12. *(Remarque : tout multiple de* 18 *et* 15 *laisse un reste de* 0 *ou* 6 *modulo* 12 *!)*

Quel est le **nombre exact de places** (multiple commun à 15 et 18, non divisible par 12) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Combien y a-t-il de multiples de 13 compris entre 1000 et 2000 ? Quelle est la somme du plus petit et du plus grand d'entre eux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Pour vérifier un numéro de compte N, une banque calcule le reste de la division euclidienne de N par 97. On donne $N = 48\,500\,123$.

1. En décomposant N par blocs de 2 chiffres depuis la droite ($N = 48 \times 100^3 + 50 \times 100^2 + 1 \times 100 + 23$) et en utilisant $100 = 97 + 3$, expliquer comment remplacer les puissances de 100 par $3, 9$ et 27 pour trouver rapidement le reste modulo 97.
2. Calculer ce reste r (et vérifier directement à l'aide de $97 \times 5 = 485$).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Trouve les multiples communs de 4 et 6 entre 151 et 175, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Donne tous les diviseurs positifs de 30.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Remplace l'unité de 1094 pour rendre le nombre divisible par 9. Donne toutes les possibilités.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Sans effectuer la division, décide si 15128 est divisible par 4 et s'il est divisible par 8.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Un paquet de 96 cartes doit être partagé entre 27 élèves en parts égales. Combien de cartes restent après avoir donné le maximum à chacun ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Énumère les paires de dimensions entières d'un rectangle de 96 cm², à rotation près.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Le nombre 305 peut-il être à la fois multiple de 5 et multiple de 10 ? Justifie.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Un nombre laisse un reste de 2 quand on le divise par 30. Quel est son reste si on lui ajoute 59 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Prouve que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Quel est le plus petit entier à trois chiffres divisible par 12 et 15 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

On considère le nombre $N = 7\,236$.

1. N est-il divisible par 4 ? par 9 ?
2. En déduire, sans division, s'il est divisible par 12, par 18 et par 36.
3. Est-il divisible par 15 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

1. Factoriser $8^k - 1$ par $8 - 1$ pour $k = 2$ et $k = 3$.
2. En déduire que $2^{3k} - 1$ est divisible par 7 pour tout entier $k \geq 1$.
3. Vérifier pour $2^{12} - 1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Trouver tous les entiers n compris entre 200 et 300 tels que $n + 1$ soit divisible par 2, 3, 4, 5 et 6.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

1. Factoriser $10^6 - 1$ comme une différence de deux carrés.
2. En déduire la décomposition de 999 999 en facteurs premiers (on donne $999 = 3^3 \times 37$ et $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$).
3. Combien 999 999 a-t-il de diviseurs ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

1. Combien y a-t-il de multiples de 7 entre 1 000 et 2 000 ?
2. Combien de multiples de 11 ?
3. Combien d'entiers de cet intervalle sont multiples de 7 ou de 11 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Démontrer que la somme de quatre entiers consécutifs n'est jamais divisible par 4.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

1. Le nombre de diviseurs de $N = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots$ vaut $(a_1+1)(a_2+1)\ldots$. Quelles formes peut avoir un nombre qui possède exactement 10 diviseurs ?
2. Trouver le plus petit entier ayant exactement 10 diviseurs.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. Montrer que le carré d'un entier donne un reste de 0 ou de 1 dans la division par 3.
2. En déduire que si $a^2 + b^2$ est divisible par 3, alors a et b sont tous deux divisibles par 3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Le numéro ISBN-13 d'un livre commence par 978-2-07-036024, suivi d'une clé de contrôle c. Règle : on multiplie les chiffres alternativement par 1 et par 3 (en commençant par 1) ; la somme, augmentée de c, doit être un multiple de 10.

1. Calculer la clé c.
2. Un employé inverse par erreur les chiffres voisins 3 et 6 et écrit 978-2-07-063024-c avec la même clé. L'erreur est-elle détectée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

1. Démontrer que le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 24.
2. Vérifier pour $5 \times 6 \times 7 \times 8$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site