Puissances et problèmes — Exercices Maths 10e HarmoS

Exercice 1

Calculer et donner le résultat sous forme d'un entier ou d'une fraction irréductible :

1. 2^{-3} 2. $(-3)^{-2}$ 3. -3^{-2} 4. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ 5. $(-7)^0 - 7^0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Écrire chaque expression sous la forme d'une **seule puissance** a^n (où $n \in \mathbb{Z}$) :

1. $A = 5^7 \times 5^{-3} \times 5$
2. $B = \dfrac{3^4 \times 3^{-9}}{3^{-2}}$
3. $C = \left(2^{-3}\right)^4 \times 2^{15}$
4. $D = \dfrac{10^6 \times (10^{-2})^3}{10^{-4}}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes et donner le résultat sous forme d'une fraction ou d'un produit de puissances à exposants positifs :

1. $E = \dfrac{2^5 \times 6^3}{3^4 \times 4^2}$
2. $F = \dfrac{(2x^3y^{-2})^3}{4x^5y^{-4}}$ *(avec $x \neq 0, y \neq 0$)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Comparer les couples de nombres suivants **sans calculatrice**, en justifiant par les propriétés des puissances :

1. 2^{30} et 3^{20}
2. 4^{15} et 8^{10}
3. 5^{24} et 2^{56}

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'une puissance unique (ou d'un produit réduit) en factorisant par la plus petite puissance :

1. $A = 2^8 + 2^8$
2. $B = 3^{10} + 3^{10} + 3^{10}$
3. $C = 2^{12} - 2^{10}$
4. Quel est la moitié de 2^{20} et le tiers de 3^{15} ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

En laboratoire, une bactérie se divise en deux toutes les 20 minutes dans des conditions idéales. Au départ ($t = 0$), la culture contient 500 bactéries.

1. Combien y aura-t-il de bactéries au bout de 2 heures ? Puis au bout de 4 heures ?

2. Exprimer le nombre de bactéries après n heures sous forme d'une expression avec une puissance de 2.
3. Au bout de combien de temps la population aura-t-elle dépassé 500 000 bactéries ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Une feuille de papier d'épaisseur $e_0 = 0{,}1$ mm est pliée en deux de façon répétée (en supposant le pliage mathématiquement possible sans limite). À chaque pli, l'épaisseur totale double.

1. Quelle est l'épaisseur obtenue après 10 pliages (en cm) ?
2. Après combien de pliages l'épaisseur dépasse-t-elle la hauteur de la tour Eiffel (330 m) ?
3. Combien de pliages suffiraient théoriquement pour atteindre la distance Terre–Lune (384 400 km) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

En informatique, un octet vaut 8 bits (2^3 bits) et on utilise parfois les préfixes binaires basés sur $2^{10} = 1024$:

- 1 Kio $= 2^{10}$ octets $= 1024$ octets
- 1 Mio $= 2^{20}$ octets
- 1 Gio $= 2^{30}$ octets

1. Combien de **bits** contient 1 Gio ? Écrire la réponse sous forme d'une puissance de 2, puis calculer sa valeur exacte à l'aide de $2^{10} = 1024$.
2. Un disque dur vendu comme faisant « 1 To » (10^{12} octets) est affiché par le système en Gio. Quelle valeur approchée en Gio (à l'unité près) l'ordinateur va-t-il afficher ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes d'inconnue entière $x \in \mathbb{Z}$ en utilisant les propriétés des puissances :

1. $2^x = 128$
2. $3^{x-1} = \dfrac{1}{27}$
3. $5^{2x} = 625$
4. $4^x = 8^6$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

1. Calculer le chiffre des unités des premières puissances de 7 : $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6$. Quelle régularité observe-t-on ?
2. En déduire le **chiffre des unités** de 7^{2026}.
3. Quel est le chiffre des unités de $3^{100} + 2^{100}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Calcule 3^3.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Réduis $3^4 \times 3^4$ à une puissance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Réduis $4^7 \div 4^2$ à une puissance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Écris $(3^2)^4$ sous forme d'une seule puissance.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Calcule $3^0 + 4^1$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Compare 3^2 et 4^2. Donne leur différence positive.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Une culture compte 4 cellules et son effectif double 3 fois. Quel est l'effectif final ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Écris 3^{-2} comme une fraction.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un gros cube contient 4 petits cubes sur chaque arête. Combien contient-il de petits cubes en tout ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une élève écrit $3^2 + 3^2 = 3^4$. Corrige le membre de droite.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Calculer et donner le résultat sous forme d'entier, de fraction ou de nombre décimal :

1. 2^{-3}
2. $(-3)^{-2}$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
4. 10^{-4}
5. $(-5)^0$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Écrire sous la forme d'une seule puissance :

1. $2^5 \times 2^{-3} \times 2^4$
2. $(3^4)^{-2} \times 3^{10}$
3. $\frac{5^7}{5^{-2}}$
4. $\frac{7^3 \times 7^{-5}}{7^{-4}}$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Simplifier et calculer :

$$A = \frac{(2^3 \times 3^2)^2}{2^4 \times 3^3} \qquad B = \frac{6^4 \times 2^{-3}}{3^5}$$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Sans calculatrice, comparer :

1. 2^{30} et 3^{20}
2. 5^{40} et 4^{50}
3. 10^{-3} et 2^{-10}

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

La légende de l'échiquier : on place 1 grain de riz sur la première case d'un échiquier, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, en doublant à chaque case.

1. Combien de grains y a-t-il sur la case 10 ? Sur la case 64 (en puissance de 2) ?
2. Montrer que le total des grains sur les n premières cases vaut $2^n - 1$ (vérifier pour $n = 1, 2, 3, 4$).
3. Un grain pèse environ 0,02 g. Sachant que $2^{64} \approx 1{,}8 \times 10^{19}$, estimer la masse totale en tonnes.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Résoudre les équations d'inconnue entière x :

1. $2^x = 64$
2. $3^{x+1} = 81$
3. $5^x = \frac{1}{25}$
4. $10^{2x} = 0{,}001 \times 10^7$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une chaîne de messages : chaque personne qui reçoit le message l'envoie à 3 nouvelles personnes le lendemain. Le jour 0, une personne lance le message.

1. Combien de personnes reçoivent le message le jour 1 ? le jour 2 ? le jour n ?
2. Combien de nouvelles personnes le reçoivent le jour 10 ?
3. À partir de quel jour le nombre de nouveaux destinataires dépasse-t-il la population suisse (environ 9 millions) ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

En informatique, 1 kibioctet (Kio) $= 2^{10}$ octets, 1 Mio $= 2^{20}$ octets et 1 Gio $= 2^{30}$ octets. Un octet vaut $8 = 2^3$ bits.

1. Combien d'octets contient 1 Gio ? Comparer avec 10^9.
2. Combien de bits contient une mémoire de 256 Gio ? (Écrire comme puissance de 2.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

1. Calculer le chiffre des unités de 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5.
2. En déduire le chiffre des unités de 3^{2026}.
3. Quel est le chiffre des unités de $3^{2026} + 7^{2026}$? (Le chiffre des unités de 7^n suit le cycle $7, 9, 3, 1$.)

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Corriger celles qui sont fausses.

1. $2^3 + 2^3 = 2^4$
2. $3^2 \times 3^3 = 3^6$
3. $(2^3)^2 = 2^9$
4. $5^0 = 0$
5. $10^{-2} = -100$
6. $3^2 + 3^2 = 3^4$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site