Nombres premiers et décomposition — Exercices Maths 10e HarmoS

Exercice 1

En utilisant le test de primalité jusqu'à $\sqrt{n}$, déterminer si chacun des nombres suivants est **premier** ou **composé** (dans ce dernier cas, donner sa décomposition en facteurs premiers) :

1. 137
2. 161
3. 221
4. 257

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Décomposer les nombres suivants en **produits de facteurs premiers**, en écrivant le résultat sous forme de puissances :

1. 360
2. 1260
3. 2025
4. 3920

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

À l'aide des décompositions en facteurs premiers :

1. Simplifier au maximum la fraction $\dfrac{840}{1260}$.
2. Calculer exactement $\sqrt{1764}$ et $\sqrt{12\,960\,000}$ sans calculatrice.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

Pour connaître le nombre total de diviseurs d'un entier $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, on utilise la formule $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

1. Décomposer 360 et 700 en facteurs premiers et calculer combien de diviseurs possède chacun d'eux.
2. Trouver le **plus petit** entier naturel possédant exactement 12 **diviseurs**.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

On donne l'entier $A = 540$.

1. Décomposer A en facteurs premiers.
2. Quel est le plus petit entier naturel non nul k tel que $A \times k$ soit un **carré parfait** ? Calculer alors $\sqrt{A \times k}$.
3. Quel est le plus petit entier naturel non nul m tel que $A \times m$ soit un **cube parfait** ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Deux nombres entiers sont dits **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1 (PGDC $= 1$).

1. Les couples suivants sont-ils constitués de nombres premiers entre eux ? Justifier grâce aux facteurs premiers.
   a) $(14; 15)$ b) $(21; 40)$ c) $(26; 65)$ d) $(27; 32)$

2. Peut-on trouver deux nombres **composés** qui soient premiers entre eux ? Deux nombres **pairs** peuvent-ils être premiers entre eux ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

La conjecture de Goldbach énonce que tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de **deux nombres premiers**.

1. Écrire 34 et 50 de **toutes les façons possibles** (à l'ordre des termes près) comme somme de deux nombres premiers.
2. Trouver au moins trois écritures différentes de ce type pour 98.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

On appelle **nombres premiers jumeaux** deux nombres premiers qui ne diffèrent que de 2 (comme 11 et 13).

1. Dresser la liste de tous les nombres premiers compris entre 40 et 90.
2. Relever toutes les paires de nombres premiers jumeaux contenues dans cette liste.
3. Quel est le plus grand écart entre deux nombres premiers consécutifs de cette liste ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

1. Un cadenas à code secret est verrouillé par le produit de 4 nombres premiers **impairs et distincts** qui vaut exactement 2145. Quels sont ces 4 nombres premiers ?
2. Décomposer 1001 en facteurs premiers, puis en déduire astucieusement la décomposition en facteurs premiers de 4004 et de 12 012.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Dire si chaque affirmation suivante est **vraie** ou **fausse**, en donnant une justification ou un contre-exemple :

1. « Tout nombre premier supérieur à 2 est impair. »
2. « La somme de deux nombres premiers quelconques est toujours paire. »
3. « Si n est premier, alors $2n + 1$ est toujours premier. »
4. « L'expression $n^2 + n + 41$ donne un nombre premier pour tout entier $n \geq 0$. » *(Tester pour $n = 0, 1, 2$ puis $n = 40$ et $n = 41$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Décide si 97 est premier en limitant le nombre de divisions à tester.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Réfute l'affirmation « 91 est premier » à l'aide d'une égalité.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Décompose 240 en facteurs premiers.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Liste les nombres premiers compris entre 37 et 57, bornes incluses.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Donne un composé impair dont le plus petit facteur premier est 7.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Combien de diviseurs positifs possède 196 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Quel est le plus petit entier par lequel multiplier 14 pour obtenir un carré parfait ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Trouve deux nombres premiers dont le produit est 679.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Parmi 7, 49 et 15, quels nombres sont premiers ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Une étiquette indique que 240 a exactement deux facteurs premiers distincts. Contrôle l'étiquette.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Parmi les nombres 143, 149, 157, 169 et 173, lesquels sont premiers ? Justifier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Décomposer en produit de facteurs premiers :

1. 1 350
2. 2 250
3. 6 300

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

On donne $N = 1\,350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$.

1. Combien N a-t-il de diviseurs ?
2. Trouver le plus petit entier k tel que $N \times k$ soit un carré parfait.
3. Trouver le plus petit entier m tel que $N \times m$ soit un cube parfait.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

1. Simplifier $\frac{1\,350}{2\,250}$ à l'aide des décompositions en facteurs premiers.
2. Les nombres 35 et 64 sont-ils premiers entre eux ? Et 91 et 65 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

1. Trouver toutes les paires de nombres premiers jumeaux (écart de 2) comprises entre 100 et 150.
2. Pourquoi, à part $(3;5)$, le nombre situé entre deux jumeaux est-il toujours un multiple de 6 ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

Écrire 100 comme somme de deux nombres premiers, de toutes les façons possibles (sans tenir compte de l'ordre).

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Un rectangle a une aire de 210 cm^2 et des côtés de longueur entière (en cm).

1. Décomposer 210 en facteurs premiers.
2. Combien de rectangles différents (sans tenir compte de l'orientation) sont possibles ?
3. Lequel a le plus petit périmètre ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

1. Montrer que $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$.
2. En déduire que pour tout nombre $\overline{abc}$ de trois chiffres, le nombre $\overline{abcabc}$ est divisible par 7, 11 et 13.
3. Vérifier avec $\overline{abc} = 254$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

Un nombre N a exactement 3 diviseurs.

1. Donner trois exemples de tels nombres.
2. Montrer que N est forcément le carré d'un nombre premier.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

On donne $a = 2^3 \times 3 \times 5^2$ et $b = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

1. Sans calculer a et b, déterminer leur PGDC et leur PPMC.
2. Calculer a, b, PGDC et PPMC, puis vérifier que PGDC $\times$ PPMC $= a \times b$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site