Fonctions quadratiques et diverses — Exercices Maths 10e HarmoS

Exercice 1

On considère la fonction quadratique $f(x) = x^2 - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	?	?	?	?	?	?	?

2. Quelle symétrie observe-t-on dans la courbe représentative (parabole), et quelles sont les coordonnées de son **sommet** (minimum) ?
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = 0$? Et $f(x) = 21$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 2

Soit la fonction quadratique $g(x) = -2x^2 + 8$.

1. Calculer $g(0)$, $g(-1)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$.
2. Déterminer les **antécédents** éventuels de 8, de 0, de -10 et de 10 par g.
3. Quelle est la valeur **maximale** prise par $g(x)$ sur $\mathbb{R}$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 3

Associer chacune des quatre fonctions de référence suivantes à son tableau de valeurs, et justifier brièvement :

- $f_1(x) = 2x^2$ (quadratique)
- $f_2(x) = \dfrac{12}{x}$ (fonction inverse)
- $f_3(x) = x^3$ (cubique)
- $f_4(x) = \sqrt{x}$ (racine carrée)

Tableau A : $(x;y) = (1;12), (2;6), (3;4), (4;3)$ **Tableau B :** $(x;y) = (1;1), (4;2), (9;3), (16;4)$ **Tableau C :** $(x;y) = (-2;8), (-1;2), (0;0), (1;2), (2;8)$ **Tableau D :** $(x;y) = (-2;-8), (-1;-1), (0;0), (1;1), (2;8)$

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 4

On lance une balle verticalement vers le haut. Sa hauteur $h(t)$ (en mètres) en fonction du temps t (en secondes) est modélisée par la fonction quadratique :

$$h(t) = -5t^2 + 20t$$

1. Calculer la hauteur de la balle à $t = 0$ s, 1 s, 2 s, 3 s et 4 s.
2. Au bout de combien de secondes la balle retombe-t-elle au sol ?
3. Quelle hauteur maximale atteint-elle, et à quel instant ? *(Indice : factoriser $h(t)$ ou vérifier que $20 - h(t) = 5(t-2)^2$.)*

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 5

Pour parcourir une distance fixe de 180 km, la durée du trajet $t(v)$ (en heures) dépend de la vitesse moyenne v (en km/h) selon la fonction :

$$t(v) = \frac{180}{v} \qquad (v > 0)$$

1. Comment appelle-t-on ce type de fonction (ou de relation entre t et v) ?

2. Calculer $t(45)$, $t(60)$, $t(90)$ et $t(120)$.
3. Si l'on **double** la vitesse, comment varie la durée du trajet ? Quelle vitesse constante faudrait-il maintenir pour effectuer ce trajet en exactement 2 h 15 min ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 6

Sur route sèche, la distance de freinage $d_f(v)$ (en mètres) d'une voiture en fonction de sa vitesse v (en km/h) peut être modélisée par la fonction quadratique :

$$d_f(v) = \frac{v^2}{200}$$

À cette distance s'ajoute la distance parcourue pendant le temps de réaction (1 s), modélisée par la fonction linéaire $d_r(v) = \frac{v}{3{,}6}$.

1. Calculer la distance de freinage d_f, la distance de réaction d_r (arrondie à 0,1 m) et la distance totale d'arrêt $d_A = d_r + d_f$ pour $v = 50$ km/h, puis pour $v = 100$ km/h.
2. Quand la vitesse double de 50 à 100 km/h, par combien est multipliée la distance de réaction ? Par combien est multipliée la distance de freinage ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 7

Un parking applique le tarif continu par morceaux suivant en fonction de la durée t (en heures, $0 < t \leq 24$) :

- pour $0 < t \leq 1$: tarif fixe de 3,00 CHF ;
- pour $1 < t \leq 4$: 3,00 CHF plus 2,00 CHF par heure au-delà de la 1re heure ;
- pour $t > 4$: tarif plafonné à 9,00 CHF.

1. Écrire l'expression de la fonction $P(t)$ sur chacun des trois intervalles.
2. Calculer $P(0{,}5)$, $P(2{,}5)$ et $P(6)$.
3. Combien d'heures peut-on stationner exactement pour 7,00 CHF ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 8

On considère la fonction carré $f(x) = x^2$ et la fonction affine $g(x) = x + 6$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a l'égalité algébrique :

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

2. En déduire les coordonnées des **deux points d'intersection** de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = x + 6$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 9

On étudie deux fonctions géométriques liées à la dimension r (en cm) d'une sphère :

- l'aire de sa surface : $A(r) = 4\pi r^2$;
- son volume : $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1. Calculer les valeurs exactes de $A(3)$ et $V(3)$ pour une boule de rayon $r = 3$ cm.
2. Si l'on multiplie le rayon par $k = 2{,}5$, par quel facteur est multipliée l'aire A ? Par quel facteur est multiplié le volume V ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 10

Un carton carré de 20 cm de côté est découpé à ses quatre coins par quatre petits carrés identiques de côté x (avec $0 < x < 10$), puis on relève les bords pour former une boîte ouverte sans couvercle.

1. Exprimer les dimensions (longueur, largeur, hauteur) de la boîte en fonction de x, puis montrer que son volume vaut :
$$V(x) = 4x^3 - 80x^2 + 400x$$
2. Calculer $V(2)$, $V(3)$, $V(4)$ et $V(5)$. Pour laquelle de ces valeurs entières le volume est-il le plus grand ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 11

Calcule $f(-3)$ si $f(x) = x^2 + 5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 12

Quel est le sommet de $y = (x - 3)^2 + 5$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 13

Quel est le maximum réel de $f(x) = 5 - (x + 3)^2$?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 14

Trouve les deux antécédents de 0 par $f(x) = x^2 - 9$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 15

Donne l'axe de symétrie de $y = (x + 3)^2 - 5$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 16

Les valeurs de x^2 pour x = 3, 4, 5 augmentent-elles d'un pas constant ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 17

Écris $f(x) = x^2 - 6x + 14$ sous forme canonique.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 18

Résous $f(x) = 9$ si $f(x) = 5 + (x - 3)^2$.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 19

Un rectangle a pour largeur x et longueur $10 - x$. Pour quelle largeur son aire est-elle maximale ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 20

Les courbes $y = x^2$ et $y = 3x$ ont deux points communs. Donne leurs coordonnées.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 21

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

1. Compléter un tableau de valeurs pour $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
2. Déterminer le sommet de la parabole et l'axe de symétrie.
3. Déterminer les zéros de f.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 22

Soit $g(x) = -(x - 2)^2 + 9$.

1. La parabole est-elle tournée vers le haut ou vers le bas ? Donner son sommet.
2. Calculer $g(0)$.
3. Déterminer les zéros de g.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 23

Un rectangle a un périmètre de 20 cm. On note x sa largeur.

1. Exprimer sa longueur puis son aire $A(x)$.
2. Calculer $A(2)$, $A(4)$, $A(5)$, $A(7)$.
3. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette aire ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 24

Lors d'une chute libre, la distance parcourue (en m) après t secondes est $d(t) = 4{,}9t^2$.

1. Calculer la distance parcourue après 1, 2 et 3 secondes.
2. En combien de temps un objet tombe-t-il de 44,1 m ?
3. Si la durée de chute double, par combien la distance est-elle multipliée ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 25

Pour parcourir 240 km, la durée (en h) en fonction de la vitesse v (en km/h) est $t(v) = \frac{240}{v}$.

1. Calculer la durée à 60, 80 et 120 km/h.
2. À quelle vitesse faut-il rouler pour mettre 2 h 30 ?
3. Quelle est l'allure de la courbe ? Que se passe-t-il quand v devient très grand ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 26

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$.

1. Calculer les points d'intersection de leurs courbes.
2. Pour quelles valeurs de x la parabole est-elle sous la droite ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 27

Une parabole coupe l'axe des abscisses en -3 et 5 et passe par le point $(0; -15)$.

1. Déterminer l'équation de son axe de symétrie.
2. Écrire sa fonction sous la forme $f(x) = a(x + 3)(x - 5)$ et trouver a.
3. Déterminer son sommet.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 28

Le côté c d'un carré en fonction de son aire A est $c(A) = \sqrt{A}$.

1. Calculer $c(16)$, $c(50)$ (au centième) et $c(100)$.
2. Si l'aire est multipliée par 4, par combien le côté est-il multiplié ?
3. Quelle aire faut-il pour un côté de 12 cm ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 29

On compare $f(x) = 2^x$ et $g(x) = x^2$ pour x entier de 0 à 6.

1. Compléter un tableau de valeurs.
2. Pour quelles valeurs les deux fonctions sont-elles égales ?
3. Laquelle est la plus grande pour $x = 10$? Commenter.

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site

Exercice 30

Une balle est lancée vers le haut. Sa hauteur (en m) est $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$.

1. Quelle est la hauteur de départ ?
2. Écrire $h(t)$ sous la forme $-5(t - 1)^2 + k$ et en déduire la hauteur maximale.
3. À quel instant la balle touche-t-elle le sol ?

Voir la réponse et le corrigé détaillé sur le site